

MATEMATIKA TEKNIK

Studi Kasus dengan Python



Penulis ;

Bakti Siregar, M.Sc., CDS.



**Kampus
Merdeka**
INDONESIA JAYA

Edisi Pertama

Matematika Teknik

Studi Kasus Python

Bakti Siregar, M.Sc.,CDS

Table of contents

Kata Pengantar	3
Tentang Penulis	3
Ucapan Terima Kasih	3
Umpan Balik & Saran	4
1 Pendahuluan	5
1.1 Pengantar	5
1.2 Cakupan Buku	5
1.2.1 Interpolasi	5
1.2.2 Diferensiasi	8
1.2.3 Integrasi	9
1.2.4 Persamaan Nonlinier	10
1.2.5 Persamaan Diferensial Biasa	13
1.2.6 Persamaan Diferensial Parsial	14
1.2.7 Pemodelan Stokastik	16
1.2.8 Pemodelan Regresi	18
1.3 Sasaran Pembaca	20
1.4 Struktur Buku	20
2 Fungsi Estimasi	21
2.1 Interpolasi	21
2.1.1 Linear	21
2.1.2 Polinomial	22
2.1.3 Linear VS Polinomial	25
2.2 Ekstrapolasi	26
2.2.1 Linear	26
2.2.2 Polinomial	26
2.3 Interpolasi VS Ekstrapolasi	27
3 Diferensial	29
3.1 Aturan Turunan	29
3.1.1 Aturan Pangkat (Power Rule)	29
3.1.2 Aturan Perkalian (Product Rule)	29
3.1.3 Aturan Pembagian (Quotient Rule)	30
3.1.4 Aturan Rantai (Chain Rule)	30
3.2 Turunan Fungsi Numerik	31
3.3 Terapan Fungsi Turunan	34

3.3.1	Menentukan Titik Ekstrem	34
3.3.2	Turunan dalam Fisika	36
4	Deret Taylor	41
4.1	Deret Taylor untuk e^x	41
4.2	Perhitungan Perkiraan $e^{0.1}$	41
4.3	Prediksi Deret Taylor	46
4.3.1	Rumus Deret Taylor	46
4.3.2	Hitung Turunan $u(t)$	47
4.3.3	Aproksimasi $u(6)$	47
4.3.4	Nilai Sebenarnya	47
4.3.5	Kesimpulan	47
4.4	Analogi Deret Taylor	48
5	Integral	49
5.1	Definisi Integral Tak Tentu	49
5.2	Definisi Integral Tentu	50
5.3	Aturan Dasar Integrasi	51
5.3.1	Integral Fungsi-Fungsi Dasar	51
5.3.2	Metode Substitusi	51
5.3.3	Metode Integrasi Parsial	52
5.4	Penerapan Integrasi	53
5.4.1	Volume Benda Putar	53
5.4.2	Volume Kontur Penampang	63
5.4.3	Stripping Ratio	82
5.4.4	Sebaran Ledakan Partikel	82
5.4.5	Estimasi Volume Cadangan	82
5.5	Latihan Soal	82
5.6	Latihan Studi Kasus	83
5.6.1	Cadangan Tambang	83
5.6.2	Lapisan Tanah Penutup	83
5.6.3	Massa Total Material	84
5.6.4	Optimasi Volume Galian	84
5.6.5	Optimasi Produksi Tambang	85
6	Metode Numerik	87
6.1	Persamaan Nonlinear	87
6.1.1	Kuadrat (Parabolik)	87
6.1.2	Polinomial Tingkat Tinggi	87
6.1.3	Eksponensial	88
6.1.4	Logaritmik	88
6.1.5	Trigonometri	88
6.2	Metode Penyelesaian	88
6.2.1	Metode Biseksi	88
6.2.2	Metode Newton-Raphson	94
6.2.3	Metode Secant	97
6.3	Contoh Studi Kasus	101
6.3.1	Pertanyaan	102
6.3.2	Pembahasan	102
6.3.3	Kesimpulan	103

6.3.4	Visualisasi	104
6.4	Studi Kasus Tambang	104
6.4.1	Tekanan Air Pori	104
6.4.2	Distribusi Tekanan Udara	105
6.4.3	Penentuan Regangan Batuan	105
6.4.4	Kesimpulan Studi Kasus	106
6.5	Latihan Soal	106
6.6	Penutup	107
7	Pers. Non-Diferensial	109
7.1	Persamaan Aljabar	109
7.2	Persamaan Matriks	110
7.3	Sistem Persamaan Linear	110
7.4	Persamaan Eksponensial	111
7.5	Persamaan Logaritma	112
7.6	Persamaan Trigonometri	112
7.7	Persamaan Parametrik	112
7.8	Ringkasan PND	113
7.9	Studi Kasus PND	113
7.9.1	Soal 1	113
7.9.2	Soal 2	114
7.9.3	Soal 3	114
7.9.4	Soal 4	114
7.9.5	Soal 5	115
8	Pers. Diferensial Biasa	117
8.1	PDB Orde Satu	118
8.1.1	Peluruhan Gas Beracun	118
8.1.2	Pertumbuhan Retakan	119
8.1.3	Manfaat Model	121
8.2	Pers. Diferensial Orde Tinggi	121
8.2.1	Pers. Diferensial Homogen	121
8.2.2	Pers. Diferensial Tak Homogen	123
8.3	Studi Kasus PDB	124
8.3.1	Aliran Air Tanah	124
8.3.2	Ventilasi Tambang	126
8.3.3	Distribusi Suhu di Tanah	127
8.3.4	Penurunan Muka Air	128
8.3.5	Penyebaran Panas Batang Logam	130
8.4	Latihan Soal	132
8.5	Referensi	132
9	Pers. Diferensial Parsial	133
9.1	Pengantar	133
9.2	Bentuk Umum	133
9.3	Klasifikasi PDP Linear Orde Dua	133
9.4	Contoh Persamaan Diferensial Parsial	134
9.5	Aplikasi PDP di Teknik Pertambangan	134
9.6	Studi Kasus: Distribusi Suhu di Bawah Permukaan Tambang	134
9.7	Metode Penyelesaian PDP	135

9.7.1	Pemisahan Variabel	135
9.7.2	Transformasi Fourier atau Laplace	135
9.7.3	Metode Numerik	135
10	Pemodelan Stokastik	137
10.1	Ciri-Ciri Model Stokastik	137
10.2	Komponen Utama	137
10.3	Contoh Aplikasi	137
10.3.1	Proses Poisson	137
10.3.2	Proses Markov	138
10.3.3	Model Brownian Motion	138
10.3.4	Monte Carlo Simulation	138
10.4	Kelebihan Pemodelan Stokastik	138
10.5	Kekurangan	138
10.6	Referensi	138
11	Pemodelan Regresi	139
11.1	Regresi Linear Sederhana	139
11.1.1	Studi Kasus 1	139
11.1.2	Data Kasus 1	140
11.1.3	Rata-rata $R\bar{X}$ & $\bar{Y}$	140
11.1.4	Koefisien Slope b_1	140
11.1.5	Intercept b_0 :	141
11.1.6	Model Regresi Linear	141
11.1.7	Contoh Prediksi	141
11.1.8	Visualisasi 2D	141
11.1.9	Visualisasi 3D	143
11.2	Regresi Linear Berganda	145
11.2.1	Bentuk Umum Model	146
11.2.2	Tujuan RLB	146
11.2.3	Asumsi RLB	146
11.3	Evaluasi Model RLB	146
11.3.1	Studi Kasus2	147
11.3.2	Data Kasus 2	147
11.3.3	Pertanyaan	147
11.3.4	Model Umum	147
11.3.5	Langkah-langkah	148
	Referensi	148

Dalam era digital saat ini, data memiliki peran penting dalam pengambilan keputusan di berbagai bidang teknik dan industri. Matematika Teknik berperan dalam pemodelan, analisis, dan optimasi sistem berbasis data. Dengan memahami konsep matematika teknik dan pemrograman, profesional dapat menganalisis data, menyelesaikan persamaan teknik, serta mengembangkan sistem berbasis komputasi untuk meningkatkan efisiensi dan inovasi teknologi.

Mata kuliah ini memperkenalkan konsep dasar dan aplikasi praktis dari pemrograman dalam analisis data teknik. Materi mencakup manipulasi data numerik, analisis statistika, pemodelan matematika, dan komputasi teknik menggunakan bahasa pemrograman seperti Python. Mahasiswa akan mempelajari cara menangani data teknik, membuat visualisasi yang bermakna, serta menerapkan metode numerik dan statistika dalam menyelesaikan permasalahan rekayasa.

Selain itu, mata kuliah ini membahas preprocessing, transformasi, dan integrasi data, yang merupakan langkah penting dalam mempersiapkan data untuk analisis teknik. Mahasiswa juga akan mendapatkan pengalaman praktis dalam debugging, pengujian, dan optimasi kode untuk meningkatkan efisiensi dan akurasi dalam proyek berbasis data teknik.

Kata Pengantar

Tentang Penulis



Bakti Siregar, M.Sc., CDS adalah seorang Dosen di [Program Data Science ITSB](#). Ia memperoleh gelar Magister dari Departemen Matematika Terapan di National Sun Yat Sen University, Taiwan. Selain mengajar, Bakti juga bekerja sebagai Freelance Data Scientist untuk perusahaan terkemuka seperti [JNE](#), [Samora Group](#), [Pertamina](#), dan [PT. Green City Traffic](#).

Bakti memiliki antusiasme tinggi terhadap proyek (dan pengajaran) di bidang **Big Data Analytics, Machine Learning, Optimasi, dan Analisis Deret Waktu**, khususnya dalam **keuangan dan investasi**. Keahliannya berfokus pada bahasa pemrograman statistik seperti **R Studio** dan **Python**. Ia juga berpengalaman dalam menerapkan sistem basis data seperti **MySQL/NoSQL** untuk manajemen data serta mahir menggunakan alat **Big Data** seperti **Spark** dan **Hadoop**.

Beberapa proyeknya dapat dilihat di sini: [Rpubs](#), [Github](#), [Website](#), dan [Kaggle](#)

Ucapan Terima Kasih

Matematika Teknik berperan penting dalam menganalisis dan memproses data skala besar di berbagai bidang rekayasa. Modul ini mencakup teknik esensial dalam matematika teknik, termasuk:

- Dasar yang kuat dalam Python perhitungan teknik

- Kemampuan untuk memanipulasi, menganalisis, dan memvisualisasikan data teknik secara efektif
- Pemahaman mendalam tentang peran matematika dalam pemodelan dan analisis data teknik
- Keterampilan praktis dalam menerapkan metode numerik dan komputasi teknik dalam dunia nyata

Buku ini dirancang untuk pemula yang ingin membangun fondasi kuat dalam Matematika Teknik, sekaligus memahami pentingnya konsep dan penerapan dalam berbagai disiplin teknik.

Saya mengapresiasi partisipasi aktif para pembaca, yang melalui diskusi dan pertanyaan telah memperkaya pengalaman belajar. Semoga materi ini menjadi panduan praktis dalam menerapkan matematika teknik pada berbagai proyek teknik.

Umpan Balik & Saran

Masukan Anda sangat penting dalam meningkatkan modul ini. Kami mengundang semua peserta untuk berbagi pendapat mengenai isi, struktur, dan kejelasan materi. Saran untuk topik tambahan atau bagian yang memerlukan penjelasan lebih lanjut sangat kami hargai.

Dengan dukungan dan kontribusi Anda, kami bertujuan untuk menyempurnakan E-book ini agar menjadi sumber yang lebih komprehensif untuk Pemrograman Data Science. Terima kasih atas partisipasi Anda!

Untuk umpan balik dan saran, silakan hubungi:

- sciencelabs@outlook.com
- siregarbakti@gmail.com
- siregarbakti@itsb.ac.id

Chapter 1

Pendahuluan

1.1 Pengantar

Dalam dunia komputasi dan analisis numerik, berbagai teknik matematika digunakan untuk menyelesaikan permasalahan kompleks yang tidak dapat diselesaikan secara analitis. Buku ini bertujuan untuk memberikan pemahaman yang komprehensif mengenai berbagai metode numerik dan pemodelan matematika yang sering digunakan dalam berbagai disiplin ilmu, mulai dari sains hingga rekayasa.

Metode numerik merupakan teknik penyelesaian masalah matematika dengan pendekatan angka dan algoritma yang dapat diterapkan dalam komputer. Pemodelan matematika, di sisi lain, digunakan untuk merepresentasikan sistem nyata dalam bentuk persamaan dan hubungan matematis. Dengan kombinasi keduanya, banyak permasalahan di berbagai bidang seperti fisika, teknik, ekonomi, dan biologi dapat diselesaikan dengan efisiensi tinggi.

Buku ini disusun secara sistematis dengan berbagai topik utama yang mencakup interpolasi, diferensiasi, integrasi, penyelesaian persamaan nonlinier, serta berbagai jenis persamaan diferensial dan pemodelan stokastik maupun regresi. Setiap bab dalam buku ini dirancang untuk memberikan pemahaman konsep dasar, metode numerik yang umum digunakan, serta penerapan praktisnya dalam berbagai kasus. Selain itu, contoh soal dan implementasi algoritma dalam bahasa pemrograman juga disediakan untuk memperjelas penerapan teoritis dalam dunia nyata.

1.2 Cakupan Buku

1.2.1 Interpolasi

Interpolasi adalah metode matematika yang digunakan untuk memperkirakan nilai suatu variabel berdasarkan sekumpulan titik data yang diketahui. Dalam teknik tambang, interpolasi digunakan untuk memperkirakan distribusi kandungan mineral, topografi bawah tanah, dan model geologi berdasarkan sampel yang terbatas.

Beberapa penerapan interpolasi dalam industri pertambangan meliputi:

- **Estimasi Cadangan Mineral** → Menentukan kandungan bijih di antara titik-titik bor eksplorasi.
- **Modeling Geologi** → Membantu dalam pemetaan struktur bawah tanah berdasarkan data sampel.
- **Pemantauan Stabilitas Lereng** → Memperkirakan deformasi dan pergerakan tanah berdasarkan pengukuran sensor.
- **Perencanaan Tambang** → Menggunakan interpolasi untuk mengoptimalkan rencana penambangan berdasarkan karakteristik material.

Metode Interpolasi dalam Teknik Tambang:

- **Interpolasi Polinomial** → Digunakan untuk membangun fungsi polinomial yang melewati titik-titik data yang diketahui.
- **Interpolasi Spline** → Menggunakan polinomial terpisah yang dihubungkan dengan kelancaran tertentu, cocok untuk model topografi.
- **Metode Inverse Distance Weighting (IDW)** → Metode berbasis jarak yang sering digunakan untuk mengestimasi kandungan mineral.
- **Kriging** → Metode geostatistik yang lebih akurat untuk estimasi spasial dalam eksplorasi tambang.

Interpolasi polinomial Newton digunakan dalam teknik tambang untuk memperkirakan nilai kandungan mineral atau parameter geoteknik lainnya berdasarkan titik sampel.

Interpolasi Newton digunakan untuk memperkirakan nilai suatu fungsi berdasarkan sekumpulan titik data yang diketahui. Rumus umumnya adalah:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

di mana:

- x → Koordinat titik di mana kadar mineral akan diestimasi.
- $f(x)$ → Nilai kadar mineral di titik yang sudah diketahui.
- $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ → Selisih terbagi (*divided differences*), yang dihitung dengan rumus:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

dan seterusnya.

Contoh Penerapan:

Misalkan dilakukan pengujian kandungan mineral pada titik-titik berikut:

Lokasi	Kedalaman (m)	Kandungan Bijih (%)
A	100	2.5

Lokasi	Kedalaman (m)	Kandungan Bijih (%)
B	150	2.7
C	200	3.0
D	250	3.4
E	300	3.8

Kita ingin memperkirakan kandungan bijih di lokasi **175 m** menggunakan interpolasi Newton.

Langkah 1: Hitung Selisih Terbagi

Selisih Pertama:

$$\begin{aligned}
 f[x_0, x_1] &= \frac{f(150) - f(100)}{150 - 100} = \frac{2.7 - 2.5}{50} = 0.004 \\
 f[x_1, x_2] &= \frac{f(200) - f(150)}{200 - 150} = \frac{3.0 - 2.7}{50} = 0.006 \\
 f[x_2, x_3] &= \frac{f(250) - f(200)}{250 - 200} = \frac{3.4 - 3.0}{50} = 0.008 \\
 f[x_3, x_4] &= \frac{f(300) - f(250)}{300 - 250} = \frac{3.8 - 3.4}{50} = 0.008
 \end{aligned}$$

Selisih Kedua:

$$\begin{aligned}
 f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{200 - 100} = \frac{0.006 - 0.004}{100} = 0.00002 \\
 f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{250 - 150} = \frac{0.008 - 0.006}{100} = 0.00002 \\
 f[x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{300 - 200} = \frac{0.008 - 0.008}{100} = 0
 \end{aligned}$$

Selisih Ketiga:

$$\begin{aligned}
 f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{250 - 100} \\
 &= \frac{0.00002 - 0.00002}{150} = 0 \\
 f[x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{300 - 150} \\
 &= \frac{0 - 0.00002}{150} = -0.0000001333
 \end{aligned}$$

Langkah 2: Bentuk Polinomial Newton

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= f(100) + f[x_0, x_1](x - 100) + f[x_0, x_1, x_2](x - 100)(x - 150) \\
 &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - 100)(x - 150)(x - 200) \\
 &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - 100)(x - 150)(x - 200)(x - 250)
 \end{aligned}$$

Substitusi nilai:

$$P_4(x) = 2.5 + 0.004(x - 100) + 0.00002(x - 100)(x - 150) \\ + 0(x - 100)(x - 150)(x - 200) - 0.0000001333(x - 100)(x - 150)(x - 200)(x - 250)$$

1.2.1.1 Langkah 3: Substitusi $x = 175$

$$P_4(175) = 2.5 + 0.004(175 - 100) + 0.00002(175 - 100)(175 - 150) \\ + 0(175 - 100)(175 - 150)(175 - 200) \\ - 0.0000001333(175 - 100)(175 - 150)(175 - 200)(175 - 250) \\ = 2.5 + 0.004(75) + 0.00002(75)(25) - 0.0000001333(75)(25)(-25) \\ = 2.5 + 0.3 + 0.0375 + 0.000625 \\ = 2.8375$$

Jadi, kandungan bijih yang diperkirakan pada lokasi **175 m** adalah **2.84%**.

1.2.2 Diferensiasi

Bab ini mengulas **diferensiasi numerik**, yang digunakan untuk mendekati turunan suatu fungsi secara numerik. Diferensiasi numerik banyak diterapkan dalam berbagai bidang, seperti simulasi fisik, analisis sensitivitas, dan optimasi. Dalam **industri pertambangan**, diferensiasi dapat digunakan untuk menganalisis perubahan kandungan mineral atau sifat fisik material seiring dengan waktu atau perubahan kondisi lingkungan.

Beberapa penerapan **diferensiasi** dalam industri pertambangan meliputi:

- **Analisis Perubahan Kadar Mineral** → Menganalisis perubahan kadar mineral pada titik-titik eksplorasi yang berbeda.
- **Modeling Stabilitas Lereng** → Menggunakan turunan untuk menganalisis perubahan kekuatan tanah atau batuan di lereng.
- **Perhitungan Gradien Sifat Geologi** → Memodelkan perubahan sifat fisik dan kimia batuan berdasarkan data dari pengeboran dan pengukuran lainnya.
- **Simulasi Perubahan Lingkungan Tambang** → Menganalisis turunan dalam simulasi perubahan lingkungan atau distribusi sumber daya.

Metode **diferensiasi numerik** yang paling umum digunakan adalah **beda hingga**, yang memungkinkan kita untuk menghitung turunan suatu fungsi dengan pendekatan numerik. Salah satu metode dalam **diferensiasi numerik** adalah **beda hingga maju**, yang digunakan untuk mendekati turunan pertama suatu fungsi pada titik x . Rumusnya adalah sebagai berikut:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Di mana:

- $f'(x)$ adalah turunan pertama dari fungsi $f(x)$
- x adalah titik di mana kita ingin menghitung turunan.

- h adalah selisih kecil antara titik x dan titik berikutnya, yang digunakan untuk menghitung perbedaan antara nilai fungsi pada dua titik yang berdekatan.

Contoh Penerapan:

Misalkan kita ingin menghitung turunan dari fungsi $f(x) = x^2$ pada titik $x = 2$ dengan $h = 0.014$.

Langkah 1: Substitusi Nilai dalam Rumus Beda Hingga Maju

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{f(2 + 0.01) - f(2)}{0.01} \\ f'(2) &\approx \frac{f(2.01) - f(2)}{0.01} \\ f'(2) &\approx \frac{(2.01)^2 - (2)^2}{0.01} \end{aligned}$$

Langkah 2: Hitung Nilai Fungsi

$$\begin{aligned} f(2.01) &= (2.01)^2 = 4.0401 \\ f(2) &= (2)^2 = 4 \end{aligned}$$

Langkah 3: Hitung Perbedaan dan Turunan

$$f'(2) \approx \frac{4.0401 - 4}{0.01} = \frac{0.0401}{0.01} = 4.01$$

Jadi, turunan pertama dari $f(x) = x^2$ pada titik $x = 2$ adalah **4.01**.

1.2.3 Integrasi

Bab ini membahas **integrasi numerik**, yang merupakan metode untuk menghitung nilai integral suatu fungsi secara numerik. Integrasi numerik banyak digunakan dalam berbagai bidang seperti **keuangan**, **analisis spektral**, dan **pemrosesan sinyal**. Dalam **industri pertambangan**, integrasi numerik dapat digunakan untuk menghitung volume cadangan mineral, analisis data geofisika, atau menghitung estimasi sumber daya.

Beberapa penerapan **integrasi numerik** dalam industri pertambangan meliputi:

- **Estimasi Volume Cadangan** → Menghitung volume batuan atau mineral dalam suatu area berdasarkan hasil pemetaan geologi dan geofisika.
- **Analisis Data Seismik** → Mengintegrasikan data seismik untuk memodelkan struktur bawah permukaan tanah.
- **Pemodelan Sumber Daya Alam** → Menggunakan integrasi numerik untuk memperkirakan total sumber daya yang dapat dieksploitasi berdasarkan data eksplorasi.
- **Analisis Perubahan Lingkungan Tambang** → Menggunakan integrasi untuk memodelkan perubahan yang terjadi pada sistem lingkungan di sekitar lokasi tambang.

Metode **integrasi numerik** yang umum digunakan antara lain **aturan trapesium**, **aturan Simpson**, dan metode **kuadratur lainnya** yang membantu menghitung integral untuk fungsi-fungsi yang sulit dihitung secara analitik.

Salah satu metode yang sering digunakan untuk **integrasi numerik** adalah **aturan trapesium**. Metode ini mengestimasi nilai integral dengan cara mendekati daerah di bawah kurva fungsi $f(x)$ sebagai trapezoid. Rumusnya adalah sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

Di mana:

- a dan b adalah batas integral.
- h adalah lebar interval, yang dihitung dengan $h = b - a$.
- $f(a)$ dan $f(b)$ adalah nilai fungsi pada batas integral a dan b .

Metode **aturan trapesium** dapat diperluas dengan membagi interval integral menjadi subinterval lebih kecil untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat.

Contoh Penerapan:

Misalkan kita ingin menghitung integral dari fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[1, 3]$.

Langkah 1: Tentukan Nilai Batas

Batas integral adalah $a = 1$ dan $b = 3$.

Langkah 2: Hitung Lebar Interval

$$h = b - a = 3 - 1 = 2$$

Langkah 3: Hitung Nilai Fungsi pada Batas

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f(3) = 3^2 = 9$$

1.2.3.1 Langkah 4: Hitung Integral dengan Aturan Trapesium

$$\int_1^3 x^2 dx \approx \frac{2}{2}(f(1) + f(3)) = 1 \times (1 + 9) = 10$$

Jadi, hasil perkiraan integral dari $f(x) = x^2$ pada interval $[1, 3]$ dengan aturan trapesium adalah **10**.

1.2.4 Persamaan Nonlinier

Bab ini membahas tentang **persamaan nonlinier** dan teknik-teknik yang digunakan untuk menyelesaikannya. Persamaan nonlinier adalah persamaan yang tidak dapat dituliskan sebagai fungsi linear terhadap variabelnya. Penyelesaian persamaan semacam ini sering kali diperlukan dalam **perancangan teknik**, **pemodelan ekonomi**, dan berbagai aplikasi lain di mana hubungan antara variabel tidak bersifat linear.

Beberapa penerapan penyelesaian **persamaan nonlinier** dalam **industri pertambangan** meliputi:

- **Modeling Geologi** → Menyelesaikan persamaan nonlinier untuk memodelkan distribusi mineral di bawah permukaan tanah.
- **Perencanaan Penambangan** → Menyelesaikan sistem persamaan nonlinier untuk mengoptimalkan proses penambangan.
- **Simulasi Dinamika Batuan** → Menggunakan persamaan nonlinier untuk menghitung respons batuan terhadap tekanan dan beban.
- **Modeling Aliran Fluida** → Menghitung aliran fluida dalam reservoir menggunakan persamaan nonlinier.

Beberapa metode yang digunakan untuk menyelesaikan **persamaan nonlinier** adalah:

- **Metode Bagi Dua** → Metode iteratif yang membagi interval pencarian menjadi dua bagian dan mencari akar dalam subinterval.
- **Metode Newton-Raphson** → Metode berbasis turunan yang memperbaiki estimasi akar secara iteratif.
- **Metode Secant** → Metode yang tidak memerlukan turunan fungsi, menggunakan dua titik untuk memperkirakan akar.
- **Metode Fixed Point Iteration** → Metode yang menyelesaikan persamaan dengan menyusun ulang persamaan menjadi bentuk yang lebih mudah dihitung secara iteratif.

Metode **Newton-Raphson** adalah salah satu metode yang paling efisien untuk mencari akar persamaan nonlinier. Metode ini menggunakan **derivatif fungsi** untuk memperbaiki pendekatan akar persamaan secara iteratif. Rumus metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Di mana:

- x_n adalah nilai pendekatan akar pada iterasi ke- n .
- $f(x_n)$ adalah nilai fungsi pada titik x_n .
- $f'(x_n)$ adalah turunan fungsi pada titik x_n .
- x_{n+1} adalah nilai akar yang lebih baik pada iterasi berikutnya.

Contoh Penerapan:

Misalkan kita ingin menemukan akar dari persamaan:

$$f(x) = x^2 - 4$$

Langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

Langkah 1: Tentukan Fungsi dan Turunannya

Fungsi yang diberikan adalah:

$$f(x) = x^2 - 4$$

Turunan dari fungsi ini adalah:

$$f'(x) = 2x$$

Langkah 2: Pilih Titik Awal x_0

Pilih titik awal $x_0 = 3$ (Anda dapat memilih titik awal lain yang mendekati akar).

Langkah 3: Iterasi Menggunakan Rumus Newton-Raphson

Iterasi pertama:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= 3 - \frac{3^2 - 4}{2 \times 3} \\ &= 3 - \frac{9 - 4}{6} \\ &= 3 - \frac{5}{6} \\ &= 2.1667 \end{aligned}$$

Iterasi kedua:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &= 2.1667 - \frac{2.1667^2 - 4}{2 \times 2.1667} \\ &= 2.1667 - \frac{4.6944 - 4}{4.3334} \\ &= 2.1667 - \frac{0.6944}{4.3334} \\ &= 2.1667 - 0.1601 \\ &= 2.0066 \end{aligned}$$

Iterasi ketiga:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\ &= 2.0066 - \frac{2.0066^2 - 4}{2 \times 2.0066} \\ &= 2.0066 - \frac{4.0265 - 4}{4.0132} \\ &= 2.0066 - \frac{0.0265}{4.0132} \\ &= 2.0066 - 0.0066 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Hasilnya, setelah beberapa iterasi, kita mendapatkan akar $x = 2$, yang merupakan solusi dari persamaan $f(x) = x^2 - 4$.

1.2.5 Persamaan Diferensial Biasa

Bab ini membahas tentang **persamaan diferensial biasa (ODE)** dan teknik-teknik yang digunakan untuk menyelesaikannya. **ODE** menggambarkan hubungan antara fungsi dan turunan pertamanya, yang sering muncul dalam **perancangan sistem dinamis, analisis sirkuit listrik, dan pemodelan epidemiologi**.

Beberapa penerapan **persamaan diferensial biasa (ODE)** dalam **industri pertambangan** meliputi:

- **Modeling Aliran Fluida** → Menggunakan ODE untuk menggambarkan aliran fluida dalam reservoir tambang.
- **Simulasi Dinamika Batuan** → Menyelesaikan ODE untuk memodelkan respons batuan terhadap tekanan dan deformasi.
- **Perencanaan Penambangan** → Menggunakan ODE untuk memodelkan sistem dinamis dalam optimasi proses penambangan.
- **Pemodelan Kestabilan Lereng** → Menggunakan ODE untuk memprediksi pergerakan tanah dan kestabilan lereng tambang.

Berikut adalah beberapa metode yang umum digunakan untuk menyelesaikan **persamaan diferensial biasa (ODE)**:

- **Metode Euler** → Metode numerik yang digunakan untuk memperkirakan solusi ODE berdasarkan nilai pada titik awal dan turunan fungsi.
- **Metode Runge-Kutta** → Metode yang lebih akurat dibandingkan dengan metode Euler, menggunakan pendekatan lebih kompleks untuk menghitung nilai solusi ODE.
- **Metode Adams-Bashforth** → Metode numerik yang menggunakan pendekatan multistep untuk memperkirakan solusi ODE.
- **Metode Predictor-Corrector** → Metode iteratif yang digunakan untuk meningkatkan akurasi solusi numerik.

Metode Euler adalah salah satu metode paling dasar dan sederhana untuk menyelesaikan **persamaan diferensial biasa (ODE)** secara numerik. Metode ini menggunakan informasi pada titik sebelumnya untuk memperkirakan solusi pada titik berikutnya. Rumus metode Euler adalah sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Di mana:

- y_n adalah nilai solusi pada titik x_n .
- h adalah langkah atau interval perubahan pada x .
- $f(x_n, y_n)^{**}$ adalah nilai fungsi turunan pada titik (x_n, y_n) .

Contoh Penerapan:

Misalkan kita diberikan persamaan diferensial biasa:

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

Dengan kondisi awal $y(0) = 1$, kita akan menggunakan **metode Euler** untuk menghitung nilai y pada titik $x = 0.1$ dengan langkah $h = 0.1$.

Langkah 1: Tentukan Fungsi dan Kondisi Awal

Diberikan:

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

Kondisi awal:

$$y(0) = 1$$

Langkah 2: Hitung Nilai pada Titik $x_1 = 0.1$

Menggunakan rumus Euler, kita dapat menghitung nilai y pada $x_1 = 0.1$.

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Dengan $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, dan $h = 0.1$, kita substitusikan ke dalam rumus:

$$y_1 = 1 + 0.1 \cdot (0 + 1) = 1 + 0.1 = 1.1$$

Langkah 3: Lanjutkan Perhitungan untuk Titik Berikutnya

Jika kita ingin menghitung nilai y pada $x_2 = 0.2$, kita ulangi langkah yang sama:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1 \cdot (0.1 + 1.1) = 1.1 + 0.1 \cdot 1.2 = 1.1 + 0.12 = 1.22$$

1.2.6 Persamaan Diferensial Parsial

Bab ini membahas tentang **persamaan diferensial parsial (PDE)** dan teknik-teknik numerik yang digunakan untuk menyelesaikannya. **PDE** adalah persamaan yang melibatkan turunan parsial dari suatu fungsi lebih dari satu variabel. PDE sering muncul dalam banyak aplikasi teknik dan ilmiah, seperti **analisis perpindahan panas**, **mekanika fluida**, dan **teori gelombang**.

Beberapa penerapan **persamaan diferensial parsial (PDE)** dalam **industri pertambangan** meliputi:

- **Simulasi Perpindahan Panas** → Menghitung distribusi suhu dalam sistem penambangan atau reservoir geotermal menggunakan PDE.
- **Analisis Dinamika Fluida** → Menggunakan PDE untuk memodelkan aliran fluida dalam tambang bawah tanah.
- **Stabilitas Lereng** → Menggunakan PDE untuk memodelkan pergerakan tanah dan deformasi pada lereng tambang.

- **Modeling Proses Geokimia** → Menyelesaikan PDE untuk memodelkan reaksi kimia dan proses pelindian dalam industri tambang.

Berikut adalah beberapa metode yang umum digunakan untuk menyelesaikan **persamaan diferensial parsial (PDE)**:

- **Metode Beda Hingga (Finite Difference Method)** → Metode numerik yang menggunakan grid diskret untuk menghitung solusi PDE dengan mendekati turunan parsial menggunakan perbedaan terhingga.
- **Metode Elemen Hingga (Finite Element Method)** → Metode numerik yang membagi domain masalah menjadi elemen-elemen kecil, sangat cocok untuk geometri yang kompleks.
- **Metode Volume Hingga (Finite Volume Method)** → Metode yang mengalikan integral PDE dengan volume kecil untuk menghitung solusi numerik.
- **Metode Spektral** → Metode yang menggunakan basis fungsi global (seperti Fourier atau polinomial) untuk menyelesaikan PDE dengan presisi tinggi.

Metode **beda hingga** adalah salah satu metode numerik yang paling umum digunakan untuk menyelesaikan **persamaan diferensial parsial (PDE)**. Metode ini mendekati turunan parsial dengan perbedaan antara nilai fungsi di titik-titik diskret pada grid. Untuk PDE waktu kontinu, rumus beda hingga untuk turunan waktu dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Di mana:

- u_i adalah nilai fungsi pada titik grid i .
- h adalah langkah atau interval grid dalam variabel x atau t .
- u_{i+1}, u_{i-1} adalah nilai fungsi pada titik grid yang lebih besar dan lebih kecil dari i , masing-masing.

Contoh Penerapan:

Misalkan kita diberikan persamaan **PDE** sederhana untuk memodelkan perpindahan panas pada batang logam satu dimensi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dengan kondisi awal dan batas:

- $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ untuk $0 \leq x \leq 1$
- $u(0, t) = u(1, t) = 0$

Langkah 1: Diskretisasi PDE menggunakan Metode Beda Hingga

Dengan mendiskretkan domain waktu dan ruang, kita memperoleh perbedaan terhingga untuk turunan waktu dan ruang. Untuk turunan waktu, kita gunakan rumus beda hingga pertama:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

Sedangkan untuk turunan ruang, kita gunakan rumus beda hingga kedua:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Dengan menggabungkan kedua diskretisasi, kita memperoleh rumus untuk menghitung nilai suhu pada waktu berikutnya t_{n+1} :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Langkah 2: Iterasi untuk Menghitung Solusi

Misalkan kita tentukan parameter sebagai berikut:

- $\alpha = 0.01$
- $\Delta x = 0.1$
- $\Delta t = 0.01$

Dengan kondisi awal $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ dan kondisi batas $u(0, t) = u(1, t) = 0$, kita dapat menghitung nilai $u(x, t)$ pada langkah waktu berikutnya menggunakan rumus beda hingga di atas.

1.2.7 Pemodelan Stokastik

Bab ini membahas **pemodelan stokastik**, yang digunakan untuk merepresentasikan sistem yang mengandung ketidakpastian. **Pemodelan stokastik** sering kali digunakan untuk menggambarkan fenomena yang dipengaruhi oleh variabel acak. Metode-metode yang digunakan dalam pemodelan stokastik, seperti **proses Markov** dan **simulasi Monte Carlo**, memungkinkan kita untuk memprediksi dan menganalisis hasil dalam situasi yang tidak deterministik.

Beberapa penerapan **pemodelan stokastik** dalam **industri pertambangan** meliputi:

- **Peramalan Cadangan Mineral** → Menggunakan simulasi stokastik untuk memperkirakan ketidakpastian dalam estimasi cadangan mineral.
- **Modeling Geostatistik** → Menggunakan proses Markov atau simulasi Monte Carlo untuk memodelkan distribusi spasial mineral di dalam tanah.
- **Optimasi Proses Tambang** → Menggunakan pemodelan stokastik untuk merencanakan dan mengoptimalkan operasi tambang dengan mempertimbangkan ketidakpastian dalam parameter operasi.
- **Simulasi Risiko** → Menerapkan simulasi Monte Carlo untuk memperkirakan potensi risiko dalam proyek tambang, seperti fluktuasi harga bahan bakar atau biaya operasional.

Beberapa metode pemodelan stokastik yang sering digunakan dalam **industri pertambangan** meliputi:

- **Proses Markov** → Digunakan untuk memodelkan perubahan keadaan yang terjadi secara acak dalam sistem, seperti pergerakan kadar mineral atau kondisi peralatan tambang.
- **Simulasi Monte Carlo** → Teknik simulasi yang digunakan untuk mengevaluasi hasil ketidakpastian dalam perencanaan dan pengambilan keputusan di pertambangan, termasuk dalam estimasi cadangan dan analisis risiko.
- **Metode Simulasi Discrete Event (DES)** → Menggunakan simulasi berbasis waktu untuk menggambarkan proses yang terjadi dalam sistem yang melibatkan urutan kejadian acak.
- **Model Proses Poisson** → Digunakan untuk memodelkan kejadian acak dalam waktu atau ruang, seperti distribusi kejadian ledakan atau kecelakaan dalam operasi tambang.

Proses **Markov** adalah model stokastik di mana hasil masa depan hanya bergantung pada keadaan saat ini dan tidak pada sejarah sebelumnya. Dalam konteks pertambangan, ini dapat digunakan untuk memodelkan pergerakan kadar mineral atau status peralatan tambang yang berubah secara acak.

Rumus dasar untuk proses **Markov** adalah:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{ij}$$

Di mana:

- X_n adalah keadaan sistem pada waktu langkah ke- n .
- P_{ij} adalah probabilitas transisi dari keadaan i ke keadaan j pada satu langkah waktu.
- $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ adalah probabilitas berada di keadaan j pada langkah waktu ke- $n+1$, mengingat keadaan pada langkah waktu ke- n .

Simulasi Monte Carlo adalah metode stokastik yang digunakan untuk menghitung hasil dari sebuah model yang memiliki ketidakpastian atau variabel acak dengan melakukan simulasi berulang. Dalam konteks pertambangan, Monte Carlo sering digunakan untuk memperkirakan distribusi cadangan mineral atau risiko operasi tambang.

Rumus dasar untuk simulasi Monte Carlo adalah:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Di mana:

- Y adalah hasil yang ingin diprediksi (misalnya, estimasi cadangan mineral).
- $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah variabel acak yang mempengaruhi hasil, yang dipilih berdasarkan distribusi probabilitas tertentu.
- $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ adalah fungsi yang menggambarkan hubungan antara variabel acak dan hasil yang ingin dihitung.

Dengan mengulang simulasi ini ribuan atau jutaan kali, kita dapat memperoleh distribusi hasil yang memperhitungkan ketidakpastian dalam model.

Contoh Penerapan:

Misalkan kita ingin memperkirakan estimasi cadangan mineral di sebuah tambang dengan menggunakan simulasi Monte Carlo. Dalam hal ini, kita dapat mendefinisikan variabel acak seperti kadar mineral, kedalaman lapisan bijih, dan volume bahan baku yang tersedia.

Langkah 1: Tentukan variabel acak dan distribusi probabilitas

Misalnya:

- X_1 adalah kadar mineral, yang mengikuti distribusi normal dengan rata-rata 5% dan deviasi standar 1%.
- X_2 adalah kedalaman lapisan bijih, yang mengikuti distribusi uniform antara 50m dan 150m.
- X_3 adalah volume bahan baku, yang mengikuti distribusi lognormal dengan rata-rata 100.000 ton dan deviasi standar 20.000 ton.

Langkah 2: Tentukan fungsi hubungan

Fungsi untuk memperkirakan cadangan mineral dapat berupa:

$$Y = X_1 \times X_2 \times X_3$$

Langkah 3: Lakukan simulasi Monte Carlo

Simulasikan ribuan atau juta-an kombinasi nilai untuk X_1, X_2 , dan X_3 berdasarkan distribusi probabilitas yang telah ditentukan. Hitung hasil Y pada setiap simulasi dan kumpulkan hasilnya untuk memperoleh distribusi cadangan mineral yang dapat digunakan untuk analisis lebih lanjut.

1.2.8 Pemodelan Regresi

Bab ini membahas **teknik regresi** dalam **analisis data**, yang digunakan untuk memprediksi hubungan antara variabel. **Regresi** banyak digunakan di berbagai bidang seperti **ekonomi**, **ilmu sosial**, **kedokteran**, dan bahkan **industri pertambangan** untuk memperkirakan variabel yang tidak dapat diukur langsung berdasarkan variabel yang dapat diukur.

Metode regresi memungkinkan kita untuk membangun model yang menggambarkan hubungan antara satu atau lebih variabel bebas dengan variabel terikat. Dua metode yang paling umum digunakan adalah **regresi linear** dan **regresi non-linear**, serta **regresi berganda** yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas.

Beberapa penerapan **regresi** dalam **industri pertambangan** meliputi:

- **Estimasi Kandungan Mineral** → Menggunakan regresi untuk memodelkan hubungan antara kedalaman pengeboran dan kadar mineral di suatu area.
- **Peramalan Produksi** → Menggunakan regresi untuk memprediksi produksi tambang berdasarkan variabel seperti jumlah tenaga kerja, kecepatan peralatan, dan kondisi geologi.
- **Analisis Kinerja Peralatan** → Menggunakan regresi untuk memprediksi masa pakai peralatan tambang berdasarkan faktor-faktor seperti usia, pemeliharaan, dan beban operasional.

- **Penentuan Biaya Operasional** → Menggunakan regresi untuk memodelkan hubungan antara faktor-faktor ekonomi dan biaya operasional dalam proses pertambangan.

Jenis-jenis Regresi:

- **Regresi Linear** → Digunakan untuk memodelkan hubungan linier antara satu variabel bebas dengan variabel terikat.
- **Regresi Non-linear** → Digunakan untuk memodelkan hubungan yang tidak mengikuti pola linier.
- **Regresi Berganda** → Digunakan untuk memodelkan hubungan antara lebih dari satu variabel bebas dan variabel terikat.

Regresi linear adalah metode yang digunakan untuk memodelkan hubungan linier antara variabel independen x dan variabel dependen y . Model regresi linear mengikuti rumus:

$$y = a + bx$$

Di mana:

- y adalah variabel terikat (dependent variable),
- x adalah variabel bebas (independent variable),
- a adalah konstanta (intercept),
- b adalah koefisien regresi (slope), yang menunjukkan seberapa besar perubahan y terkait dengan perubahan x .

Regresi berganda digunakan untuk memodelkan hubungan antara lebih dari satu variabel bebas dan variabel terikat. Bentuk umum dari **regresi berganda** adalah:

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$$

Di mana:

- y adalah variabel terikat,
- $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel bebas,
- $b_1, b_2, \dots, b_n$ adalah koefisien regresi untuk setiap variabel bebas, yang menunjukkan pengaruh masing-masing variabel terhadap y .

Misalkan kita memiliki data hubungan antara **jumlah tenaga kerja** (x) dan **jumlah produksi** (y) di sebuah tambang.

Jumlah Tenaga Kerja (x)	Jumlah Produksi (y)
50	200
60	250
70	300
80	350

Kita ingin memodelkan hubungan antara **jumlah tenaga kerja** dan **jumlah produksi** menggunakan regresi linear.

Langkah 1: Tentukan rumus regresi

Rumus regresi linear adalah:

$$y = a + bx$$

Di mana a adalah intercept dan b adalah koefisien regresi yang menunjukkan hubungan antara x dan y .

Langkah 2: Hitung koefisien regresi

Menggunakan metode **least squares**, kita dapat menghitung nilai a dan b . Untuk contoh ini, mari kita anggap kita sudah menghitung dan memperoleh hasil:

- $a = 100$
- $b = 3$

Langkah 3: Gunakan model untuk prediksi

Jika kita ingin memprediksi **jumlah produksi** untuk **90 tenaga kerja**, kita dapat menggunakan rumus regresi yang telah dihitung:

$$y = 100 + 3(90) = 100 + 270 = 370$$

Jadi, **jumlah produksi** yang diprediksi dengan **90 tenaga kerja** adalah **370**.

1.3 Sasaran Pembaca

Buku ini ditujukan bagi mahasiswa, peneliti, dan praktisi yang ingin memahami metode numerik dan pemodelan matematika secara lebih mendalam. Diharapkan setelah membaca buku ini, pembaca dapat menerapkan berbagai metode yang telah dipelajari dalam berbagai kasus nyata, baik dalam penelitian akademik maupun dalam dunia industri.

1.4 Struktur Buku

Setiap bab dalam buku ini dilengkapi dengan:

- **Penjelasan Teoritis:** Konsep dasar dan teori yang mendasari metode yang dibahas dengan ilustrasi dan penjelasan mendalam.
- **Algoritma dan Implementasi:** Langkah-langkah numerik serta implementasi dalam bahasa pemrograman Python.
- **Contoh Kasus dan Aplikasi:** Studi kasus nyata yang menggambarkan bagaimana metode tersebut digunakan dalam berbagai bidang, termasuk rekayasa, keuangan, dan sains data.
- **Latihan dan Soal:** Sejumlah soal latihan untuk menguji pemahaman pembaca serta solusi yang dapat membantu memperjelas konsep yang telah dipelajari.

Chapter 2

Fungsi Estimasi

Dalam analisis matematika dan pemodelan, estimasi nilai dan fungsi memainkan peran penting dalam memahami perubahan dan perilaku suatu sistem. Estimasi nilai suatu fungsi bertujuan untuk mendekati nilai fungsi di suatu titik ketika fungsi tersebut sulit dihitung secara langsung. Metode yang sering digunakan antara lain interpolasi, ekstrapolasi, dan deret Taylor.

2.1 Interpolasi

Interpolasi adalah metode untuk memperkirakan nilai suatu fungsi di antara titik-titik data yang diketahui. Ada beberapa jenis interpolasi, tetapi yang paling umum adalah **Interpolasi Linear** dan **Interpolasi Polinomial**.

2.1.1 Linear

Interpolasi linear menggunakan garis lurus untuk menghubungkan dua titik data yang diketahui. Jika kita memiliki dua titik:

$$(x_0, f(x_0)) \quad \text{dan} \quad (x_1, f(x_1))$$

maka nilai fungsi $f(x)$ untuk suatu x di antara x_0 dan x_1 dapat dihitung dengan rumus:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Untuk Penjelasan lebih detail perhatikan video dibawah ini:

Contoh: Misalkan kita memiliki data berikut:

$$f(2) = 4$$

$$f(4) = 8$$

Kita ingin mencari $f(3)$. Dengan menggunakan rumus interpolasi linear:

$$\begin{aligned}f(3) &\approx 4 + \frac{8-4}{4-2}(3-2) \\&= 4 + \frac{4}{2}(1) \\&= 4 + 2 \\&= 6\end{aligned}$$

Jadi, hasil interpolasi $f(3) = 6$.

WebGL is not supported by your browser - visit
<https://get.webgl.org> for more info

2.1.2 Polinomial

Ketika kita memiliki lebih dari dua titik data, interpolasi polinomial dapat digunakan untuk mendapatkan pendekatan yang lebih akurat. Salah satu metode yang umum digunakan adalah **Interpolasi Lagrange**, yang mendefinisikan polinomial interpolasi $P_n(x)$ sebagai:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

dengan **basis Lagrange** yang dirumuskan sebagai:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Misalkan kita memiliki tiga titik:

Titik 1: (1,2)

Titik 2: (2,5)

Titik 3: (4,3)

Polinomial interpolasi yang kita cari adalah **polinomial derajat 2** yang melalui ketiga titik ini. Langkah pertama, tentukan basis Lagrange terlebih dahulu:

Basis untuk $L_0(x)$: gunakan titik $x_1 = 2$ dan $x_2 = 4$, abaikan $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 4)}{(1 - 2)(1 - 4)} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 4)}{-1 \times -3} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 4)}{3} \end{aligned}$$

Basis untuk $L_1(x)$: gunakan titik $x_0 = 1$ dan $x_2 = 4$, abaikan $x_1 = 2$:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ &= \frac{(x - 1)(x - 4)}{(2 - 1)(2 - 4)} \\ &= \frac{(x - 1)(x - 4)}{1 \times -2} \\ &= -\frac{(x - 1)(x - 4)}{2} \end{aligned}$$

Basis untuk $L_2(x)$: gunakan titik $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$, abaikan $x_2 = 4$.

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} \\
&= \frac{(x-1)(x-2)}{3 \times 2} \\
&= \frac{(x-1)(x-2)}{6}
\end{aligned}$$

Menyusun Polinomial Interpolasi, berdasarkan basis:

$$P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

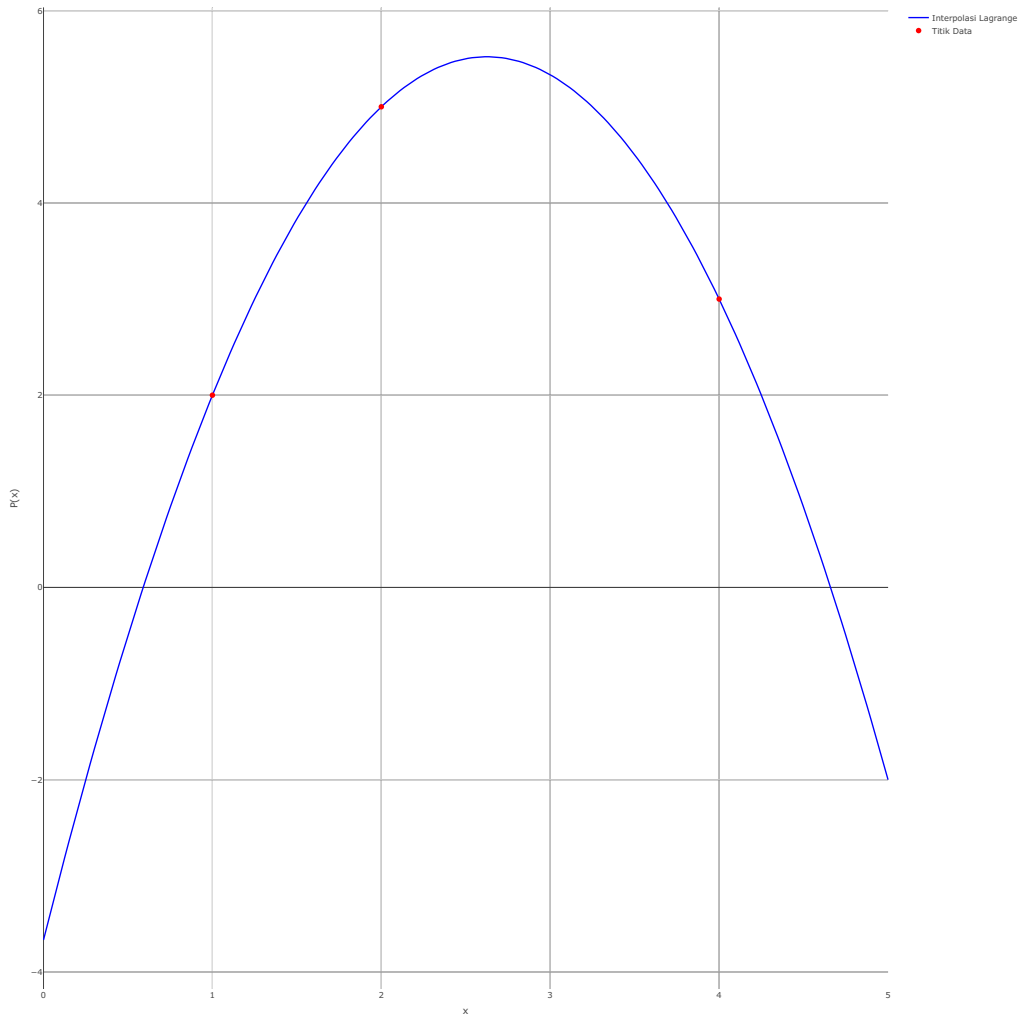
Substitusi $y_0 = 2$, $y_1 = 5$, dan $y_2 = 3$:

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= 2 \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{3} + 5 \cdot \left(-\frac{(x-1)(x-4)}{2} \right) + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{6} \\
&= \frac{2(x-2)(x-4)}{3} - \frac{5(x-1)(x-4)}{2} + \frac{3(x-1)(x-2)}{6}
\end{aligned}$$

Bentuk ekspresi ini, dapat disederhanakan ke dalam pecahan persekutuan terkecil (KPK dari 3, 2, dan 6 adalah **6**):

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \frac{4(x-2)(x-4)}{6} - \frac{15(x-1)(x-4)}{6} + \frac{5(x-1)(x-2)}{6} \\
&= \frac{4(x-2)(x-4) - 15(x-1)(x-4) + 5(x-1)(x-2)}{6}
\end{aligned}$$

Interpolasi Lagrange memungkinkan kita menemukan polinomial yang melewati sekumpulan titik dengan cara yang sistematis dan akurat. Dengan langkah-langkah ini, kita telah menentukan polinomial interpolasi **derajat 2** yang melewati titik-titik yang diberikan.



2.1.3 Linear VS Polinomial

Metode	Rumus	Kelebihan	Kekurangan
Interpolasi Linear	$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$	Sederhana, cepat, mudah dihitung	Kurang akurat jika data tidak linier
Interpolasi Polinomial	$P_n(x) = \sum f(x_i)L_i(x)$	Lebih akurat untuk data non-linier	Bisa menjadi tidak stabil jika polinomial terlalu tinggi (Runge's phenomenon)

Dengan interpolasi, kita bisa memperkirakan nilai yang tidak diketahui berdasarkan

pola yang sudah ada.

2.2 Ekstrapolasi

Ekstrapolasi adalah metode untuk memperkirakan nilai suatu fungsi di **luar** rentang data yang diketahui. Berbeda dengan **Interpolasi**, yang memperkirakan nilai di antara titik-titik data yang diketahui, ekstrapolasi mencoba memprediksi nilai di luar rentang tersebut berdasarkan pola yang ada.

2.2.1 Linear

Ekstrapolasi linear menggunakan asumsi bahwa pola perubahan data mengikuti tren **garis lurus**. Jika kita memiliki dua titik data:

$$(x_0, f(x_0)) \quad \text{dan} \quad (x_1, f(x_1))$$

maka untuk memperkirakan $f(x)$ pada x yang **lebih besar atau lebih kecil** dari x_0 dan x_1 , kita bisa menggunakan rumus:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

Misalkan kita memiliki data berikut:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ f(2) &= 4 \end{aligned}$$

Kita ingin memperkirakan $f(3)$. Dengan asumsi bahwa pola perubahan **linier**, kita dapat menghitung:

$$\begin{aligned} f(3) &\approx f(2) + (f(2) - f(1)) \\ &= 4 + (4 - 2) \\ &= 4 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Jadi, hasil ekstrapolasi $f(3) = 6$.

2.2.2 Polinomial

Jika data memiliki pola yang lebih kompleks (bukan linier), kita bisa menggunakan **polinomial** untuk pendekatan yang lebih akurat. Salah satu metode yang umum digunakan adalah **Ekstrapolasi Polinomial Lagrange**, yang menggunakan rumus:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

dengan **basis Lagrange**:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Namun, ekstrapolasi polinomial sering kali **tidak stabil**, terutama jika digunakan pada rentang yang jauh dari data asli.

2.3 Interpolasi VS Ekstrapolasi

Metode	Tujuan	Kelebihan	Kekurangan
Interpolasi	Memperkirakan nilai di antara titik-titik data yang diketahui	Lebih akurat karena masih dalam rentang data asli	Tidak bisa digunakan untuk memprediksi data di luar rentang
Ekstrapolasi	Memperkirakan nilai di luar rentang data yang diketahui	Bisa digunakan untuk prediksi masa depan	Bisa tidak akurat jika pola data berubah

Dengan memahami ekstrapolasi, kita bisa **memperkirakan tren** suatu fenomena berdasarkan pola yang ada.

Chapter 3

Diferensial

3.1 Aturan Turunan

Turunan suatu fungsi menunjukkan **laju perubahan fungsi** terhadap variabelnya. Secara formal, turunan pertama didefinisikan sebagai:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Turunan digunakan dalam berbagai bidang seperti fisika (kecepatan dan percepatan), ekonomi (elastisitas), dan optimasi fungsi. Berikut adalah beberapa aturan dasar dalam turunan fungsi secara Analitik:

3.1.1 Aturan Pangkat (Power Rule)

Jika $f(x) = x^n$, maka:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Contoh: Misalkan $f(x) = x^4$, maka turunannya adalah:

$$f'(x) = 4x^3$$

3.1.2 Aturan Perkalian (Product Rule)

Jika $u(x)$ dan $v(x)$ adalah dua fungsi berbeda, maka:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Contoh: Misalkan $f(x) = (x^2 + 1)(x + 3)$, dengan:

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow u' = 2x$$

$$v = x + 3 \Rightarrow v' = 1$$

Maka turunannya:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (2x)(x+3) + (x^2+1)(1) \\
 &= 2x(x+3) + x^2 + 1 \\
 &= 2x^2 + 6x + x^2 + 1 \\
 &= 3x^2 + 6x + 1
 \end{aligned}$$

3.1.3 Aturan Pembagian (Quotient Rule)

Jika $u(x)$ dan $v(x)$ adalah dua fungsi berbeda:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Contoh: Misalkan $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$, dengan:

$$\begin{aligned}
 u &= x^2 + 1 \Rightarrow u' = 2x \\
 v &= x + 2 \Rightarrow v' = 1
 \end{aligned}$$

Maka turunannya:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(2x)(x+2) - (x^2+1)(1)}{(x+2)^2} \\
 &= \frac{2x^2 + 4x - x^2 - 1}{(x+2)^2} \\
 &= \frac{x^2 + 4x - 1}{(x+2)^2}
 \end{aligned}$$

3.1.4 Aturan Rantai (Chain Rule)

Jika $f(x) = g(h(x))$, maka:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Contoh: Misalkan $f(x) = (2x^3 + x + 1)^4$, gunakan aturan rantai dengan:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= 2x^3 + x + 1 \\
 h(x) &= g(x)^4
 \end{aligned}$$

Turunan dari $h(x)$:

$$\frac{d}{dx}(2x^3 + x + 1)^4 = 4(2x^3 + x + 1)^3 \cdot (6x^2 + 1)$$

Contoh Perhitungan: Misalkan diberikan fungsi:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$$

Turunan pertama dari fungsi ini adalah:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$$

Untuk $x = 2$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3(2)^2 + 4(2) - 5 \\ &= 3(4) + 8 - 5 \\ &= 12 + 8 - 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Turunan menunjukkan laju perubahan fungsi dan digunakan dalam berbagai bidang. Aturan turunan seperti aturan pangkat, perkalian, pembagian, dan rantai sangat berguna dalam menghitung turunan berbagai jenis fungsi. Contoh perhitungan menunjukkan bagaimana menerapkan aturan turunan untuk fungsi polinomial. Dengan pemahaman ini, kita bisa lebih mudah menganalisis bagaimana suatu fungsi berubah!

3.2 Turunan Fungsi Numerik

Metode ini digunakan ketika turunan analitik sulit dihitung. Beberapa metode umum:

1. Selisih Maju (**Forward Difference**):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Selisih Mundur (**Backward Difference**):

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

3. Selisih Tengah (**Central Difference**) (lebih akurat):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Contoh Perhitungan: Jika $f(x) = x^2$ dan ingin menghitung $f'(2)$ dengan $h = 0.01$:

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{f(2.01) - f(1.99)}{0.02} \\ &= \frac{4.0401 - 3.9601}{0.02} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ini mendekati hasil analitik $f'(x) = 2x$, di mana $f'(2) = 4$.

```

library(plotly)

# Fungsi yang akan diturunkan
f <- function(x) {
  x^2
}

# Metode Selisih Maju (Forward Difference)
forward_diff <- function(x, h) {
  (f(x + h) - f(x)) / h
}

# Metode Selisih Mundur (Backward Difference)
backward_diff <- function(x, h) {
  (f(x) - f(x - h)) / h
}

# Metode Selisih Tengah (Central Difference)
central_diff <- function(x, h) {
  (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h)
}

# Nilai x dan h
x_val <- 2
h_val <- 0.01

# Perhitungan turunan numerik
fwd <- forward_diff(x_val, h_val)
bwd <- backward_diff(x_val, h_val)
ctr <- central_diff(x_val, h_val)

# Data untuk visualisasi
x_vals <- seq(1.5, 2.5, length.out = 100)
y_vals <- f(x_vals)

data <- data.frame(x = x_vals, y = y_vals)

# Buat plot dengan Plotly
fig <- plot_ly(data, x = ~x, y = ~y, type = 'scatter', mode = 'lines',
  name = 'f(x) = x^2') %>%
  add_trace(x = c(x_val, x_val + h_val), y = c(f(x_val), f(x_val + h_val)),
    type = 'scatter', mode = 'lines+markers',
    name = 'Backward Difference',
    line = list(color = 'red', dash = 'dash')) %>%
  add_trace(x = c(x_val - h_val, x_val), y = c(f(x_val - h_val), f(x_val)),
    type = 'scatter', mode = 'lines+markers',
    name = 'Central Difference',
    line = list(color = 'green', dash = 'dot')) %>%
  add_trace(x = c(x_val - h_val, x_val + h_val),

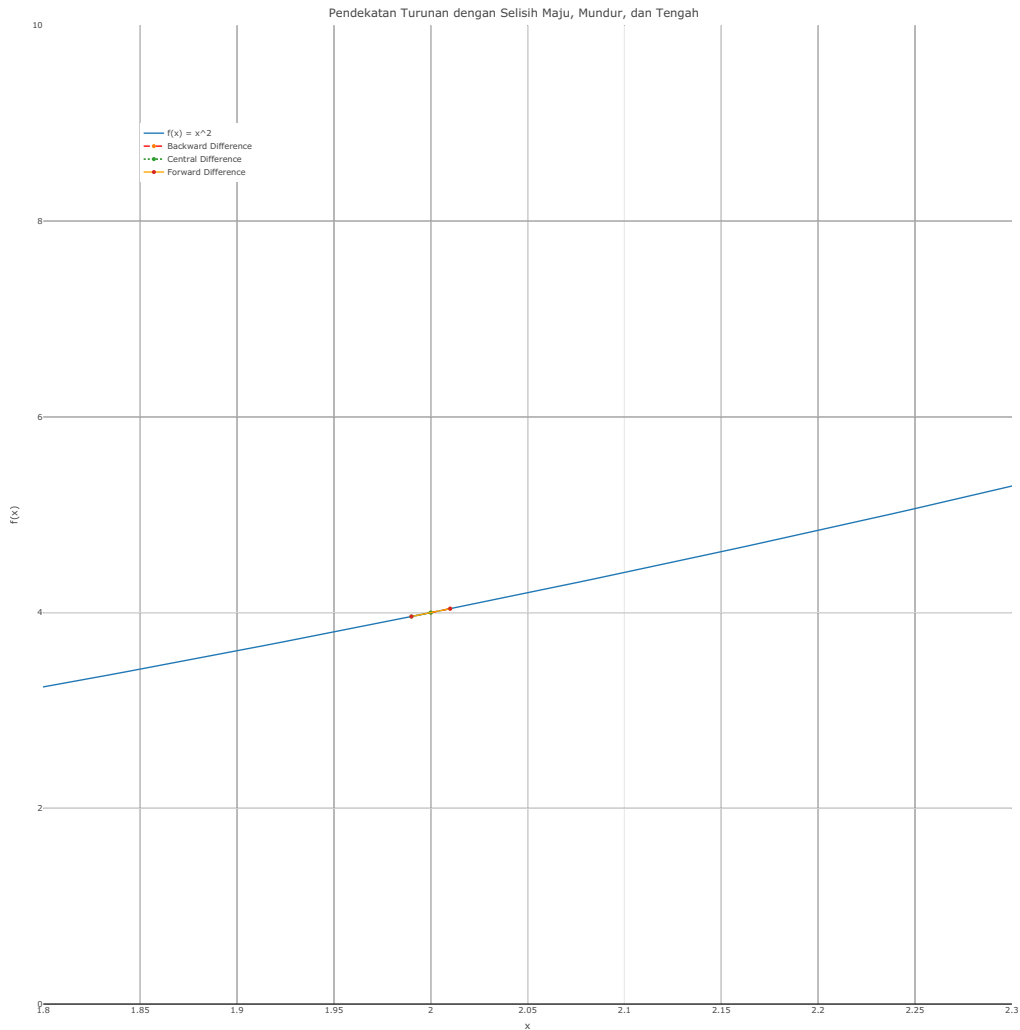
```

```

        y = c(f(x_val - h_val), f(x_val + h_val)),
        type = 'scatter', mode = 'lines+markers',
        name = 'Forward Difference',
        line = list(color = 'orange', dash = 'solid')) %>%
layout(title = 'Pendekatan Turunan dengan Selisih Maju, Mundur, dan Tengah',
        xaxis = list(title = 'x', range = c(1.8, 2.3)), # Mengatur zoom out
        yaxis = list(title = 'f(x)', range = c(0, 10)),
        legend = list(x = 0.1, y = 0.9))

# Tampilkan plot
fig

```



3.3 Terapan Fungsi Turunan

Turunan dapat digunakan untuk menemukan **titik ekstrem** suatu fungsi, yaitu **titik maksimum dan titik minimum**. Titik ekstrem terjadi ketika turunan pertama bernilai nol, yaitu:

$$f'(x) = 0$$

Penyelesaian persamaan ini akan memberikan **titik kritis**, yaitu kandidat titik maksimum atau minimum. Untuk menentukan apakah titik tersebut adalah **maksimum atau minimum**, kita dapat menggunakan **turunan kedua**. Proses untuk menentukan titik ekstrem, adalah:

1. **Hitung turunan pertama** $f'(x)$.
2. **Cari titik kritis** dengan menyelesaikan $f'(x) = 0$.
3. **Gunakan uji turunan kedua** untuk menentukan jenis ekstrem:
 - Jika $f''(x) > 0$, titik kritis adalah **minimum lokal** (kurva cekung ke atas).
 - Jika $f''(x) < 0$, titik kritis adalah **maksimum lokal** (kurva cekung ke bawah).

3.3.1 Menentukan Titik Ekstrem

Misalkan diberikan fungsi:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$$

Langkah 1: Hitung turunan pertama

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Langkah 2: Cari titik kritis dengan menyelesaikan $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

Bagi kedua sisi dengan 3:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Faktorkan:

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

Jadi, **titik kritis** berada di:

$$x = 3, \quad x = -1$$

Langkah 3: Hitung turunan kedua untuk uji cekung

$$f''(x) = 6x - 6$$

Evaluasi pada titik kritis, **Untuk $x = 3$:**

$$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0$$

Karena positif, maka $x = 3$ **adalah minimum lokal**. Untuk $x = -1$:

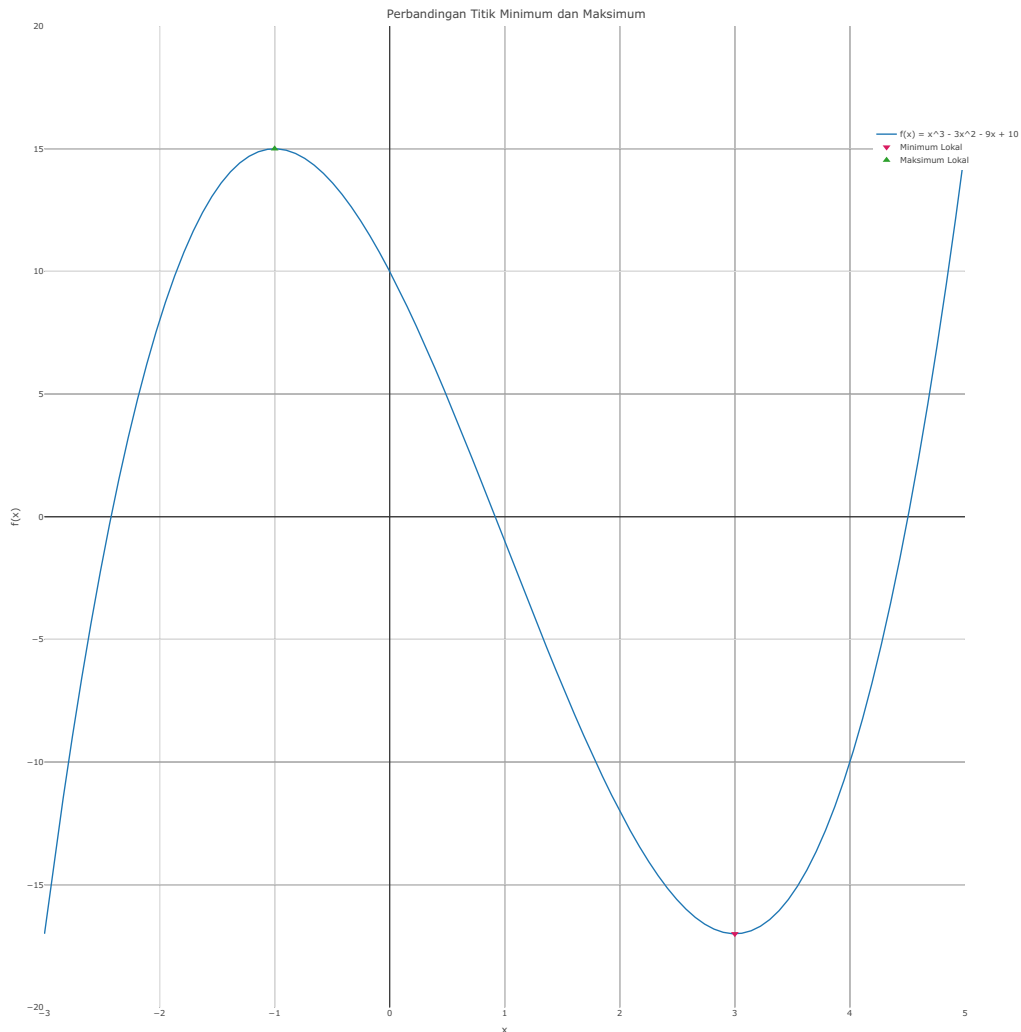
$$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0$$

Karena negatif, maka $x = -1$ **adalah maksimum lokal**.

Langkah 4: Hitung nilai fungsi pada titik ekstrem

$$\begin{aligned} f(3) &= (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 10 \\ &= 27 - 27 - 27 + 10 \\ &= -17 \quad (\text{minimum lokal}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 10 \\ &= -1 - 3 + 9 + 10 \\ &= 15 \quad (\text{maksimum lokal}) \end{aligned}$$



Kesimpulan:

Maksimum lokal terjadi pada $(-1, 15)$, ditandai dengan warna **merah** pada visualisasi.

Minimum lokal terjadi pada $(3, -17)$, ditandai dengan warna **hijau** pada visualisasi.

Turunan pertama digunakan untuk menemukan titik kritis, sementara turunan kedua menentukan apakah titik kritis tersebut merupakan **minimum** atau **maksimum**.

3.3.2 Turunan dalam Fisika

Dalam fisika, turunan digunakan untuk menganalisis **gerak benda**.

1. **Kecepatan** adalah turunan pertama dari posisi terhadap waktu:

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t)$$

Kecepatan menunjukkan **seberapa cepat posisi berubah** terhadap waktu.

2. **Percepatan** adalah turunan kedua dari posisi terhadap waktu, atau turunan pertama dari kecepatan:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t)$$

Percepatan menunjukkan **seberapa cepat kecepatan berubah** terhadap waktu.

Misalkan posisi suatu benda dinyatakan dengan fungsi:

$$s(t) = 5t^2$$

Langkah 1: Hitung kecepatan $v(t)$

Kecepatan diperoleh dengan menurunkan $s(t)$ terhadap t :

$$v(t) = \frac{d}{dt}(5t^2) = 10t$$

Langkah 2: Hitung percepatan $a(t)$

Percepatan diperoleh dengan menurunkan $v(t)$ terhadap t :

$$a(t) = \frac{d}{dt}(10t) = 10$$

Fungsi posisi: $s(t) = 5t^2$ menunjukkan bahwa benda mengalami **percepatan konstan**.
Kecepatan: $v(t) = 10t$ menunjukkan bahwa **kecepatan bertambah seiring waktu**.
Percepatan: $a(t) = 10$ menunjukkan bahwa **percepatan tetap konstan**.

```
library(plotly)

# Definisi fungsi
s <- function(t) { 5*t^2 }
v <- function(t) { 10*t }
a <- function(t) { 10 }

# Rentang waktu
t_vals <- seq(0, 5, length.out = 100)
s_vals <- s(t_vals)
v_vals <- v(t_vals)
a_vals <- rep(a(0), length(t_vals)) # Percepatan konstan

# Buat data frame
data <- data.frame(t = t_vals, s = s_vals, v = v_vals, a = a_vals)

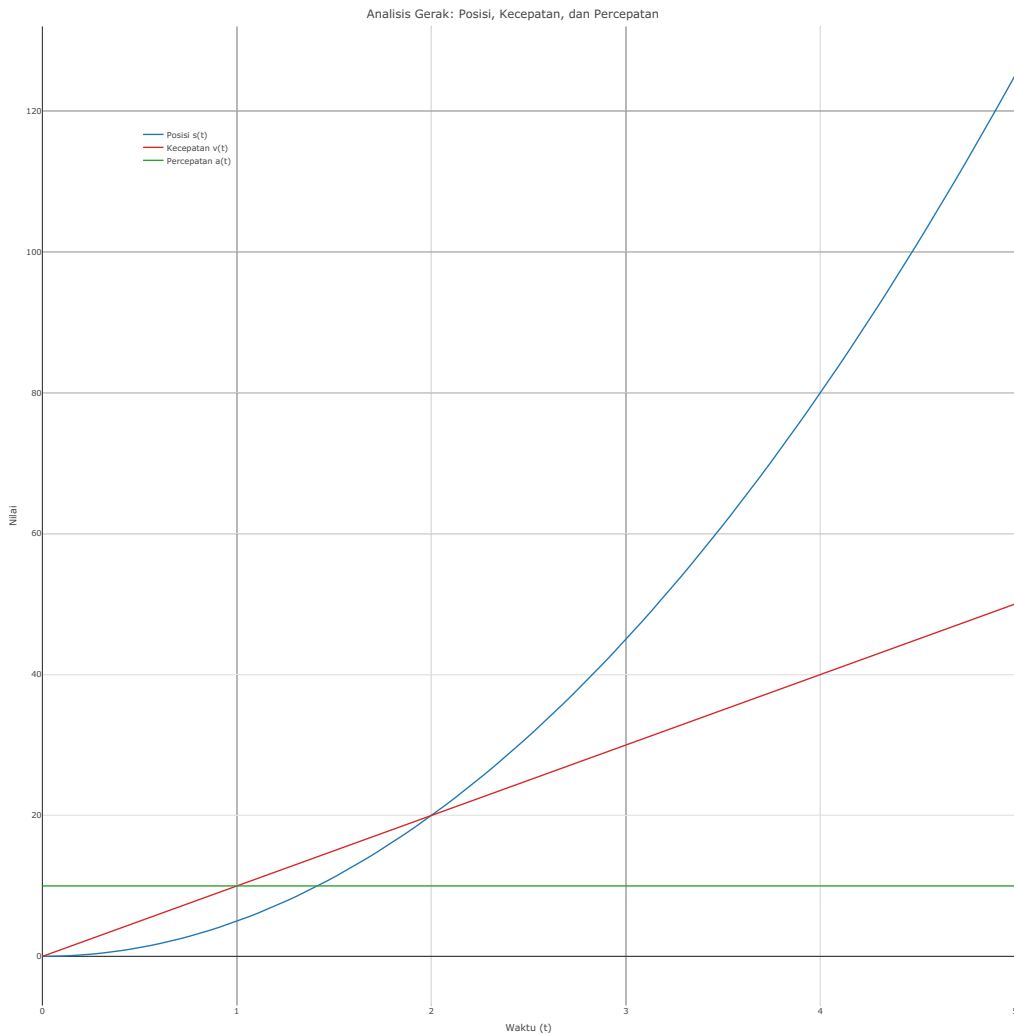
# Plot menggunakan Plotly
fig <- plot_ly() %>%
  add_trace(data = data, x = ~t, y = ~s, type = 'scatter', mode = 'lines',
            name = 'Posisi s(t)', line = list(color = '#1f77b4')) %>%
  add_trace(data = data, x = ~t, y = ~v, type = 'scatter', mode = 'lines',
```

```

        name = 'Kecepatan v(t)', line = list(color = '#d62728')) %>%
add_trace(data = data, x = ~t, y = ~a, type = 'scatter', mode = 'lines',
        name = 'Percepatan a(t)', line = list(color = '#2ca02c')) %>%
layout(title = 'Analisis Gerak: Posisi, Kecepatan, dan Percepatan',
        xaxis = list(title = 'Waktu (t)'),
        yaxis = list(title = 'Nilai'),
        legend = list(x = 0.1, y = 0.9))

# Tampilkan plot
fig

```



Kesimpulan:

Turunan pertama dari posisi memberikan kecepatan.

Turunan kedua dari posisi memberikan percepatan.

Jika percepatan **konstan**, gerak disebut **gerak lurus berubah beraturan (GLBB)**.

Dengan konsep ini, kita bisa memahami gerak benda dalam berbagai situasi fisika!

Dalam pembelajaran matematika teknik, estimasi fungsi memiliki peran penting dalam mendekati nilai suatu fungsi yang tidak diketahui secara langsung. Turunan analitik memberikan hasil yang eksak dan dapat digunakan untuk menganalisis perubahan suatu fungsi dengan presisi tinggi, sementara metode turunan numerik menjadi alternatif yang efektif ketika perhitungan analitik sulit dilakukan. Konsep turunan ini memiliki berbagai aplikasi yang luas, terutama dalam optimasi, fisika, dan pembelajaran mesin, di mana analisis perubahan dan pencarian nilai ekstrem sangat diperlukan. Oleh karena itu, pemahaman mendalam mengenai estimasi fungsi dan turunan, baik secara analitik maupun numerik, menjadi suatu keharusan dalam berbagai bidang keilmuan, khususnya teknik pertambangan.

Chapter 4

Deret Taylor

Deret Taylor adalah metode untuk **mendekati fungsi** dengan ekspansi deret berdasarkan turunan fungsi tersebut di sekitar titik tertentu.

Jika suatu fungsi $f(x)$ memiliki turunan hingga orde tinggi di sekitar $x = a$, maka kita dapat menuliskan ekspansi Taylor sebagai:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Semakin banyak suku yang digunakan, semakin **mendekati** nilai fungsi aslinya.

4.1 Deret Taylor untuk e^x

Misalkan kita ingin mendekati fungsi **eksponensial** e^x dengan ekspansi Taylor di sekitar $x = 0$.

Turunan-turunan fungsi e^x adalah:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \\ f'''(x) &= e^x \\ \dots & \text{ (dan seterusnya, karena turunan } e^x \text{ selalu sama)} \end{aligned}$$

Pada $x = 0$, semua turunan bernilai **1**, sehingga ekspansi Taylor menjadi:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

4.2 Perhitungan Perkiraan $e^{0.1}$

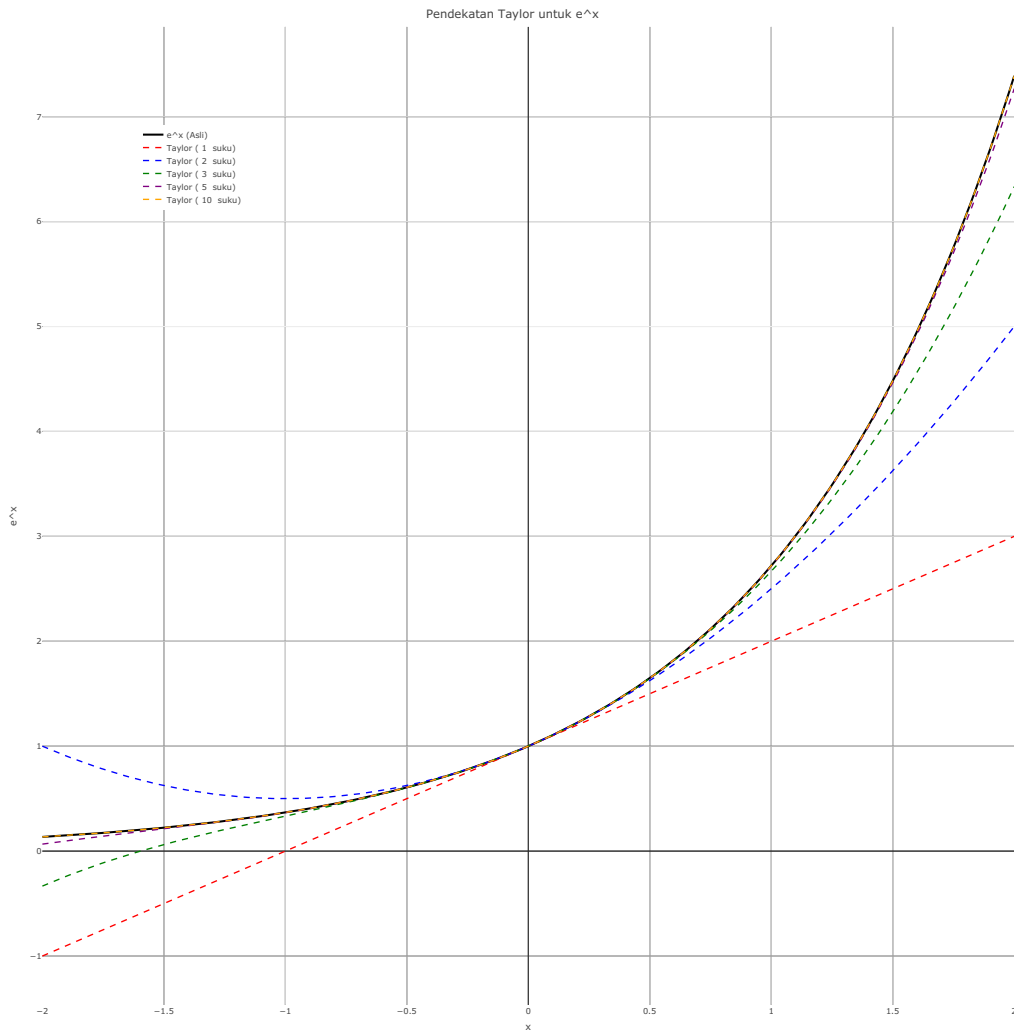
Kita bisa menghitung nilai $e^{0.1}$ dengan hanya mengambil **beberapa suku pertama**:

$$\begin{aligned}
 e^{0.1} &\approx 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!} + \frac{(0.1)^4}{4!} \\
 &= 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{6} + \frac{0.0001}{24} \\
 &= 1 + 0.1 + 0.005 + 0.0001667 + 0.000004167 \\
 &\approx 1.10517
 \end{aligned}$$

Bandingkan dengan nilai asli dari kalkulator:

$$e^{0.1} \approx 1.105170918$$

Hasil ini cukup akurat meskipun kita hanya mengambil **5 suku pertama**.



Berikut ini adalah proses perhitungan dan visualisasinya dengan menggunakan bantuan Pemrograman Python.

```
import numpy as np
import plotly.graph_objs as go
from math import factorial

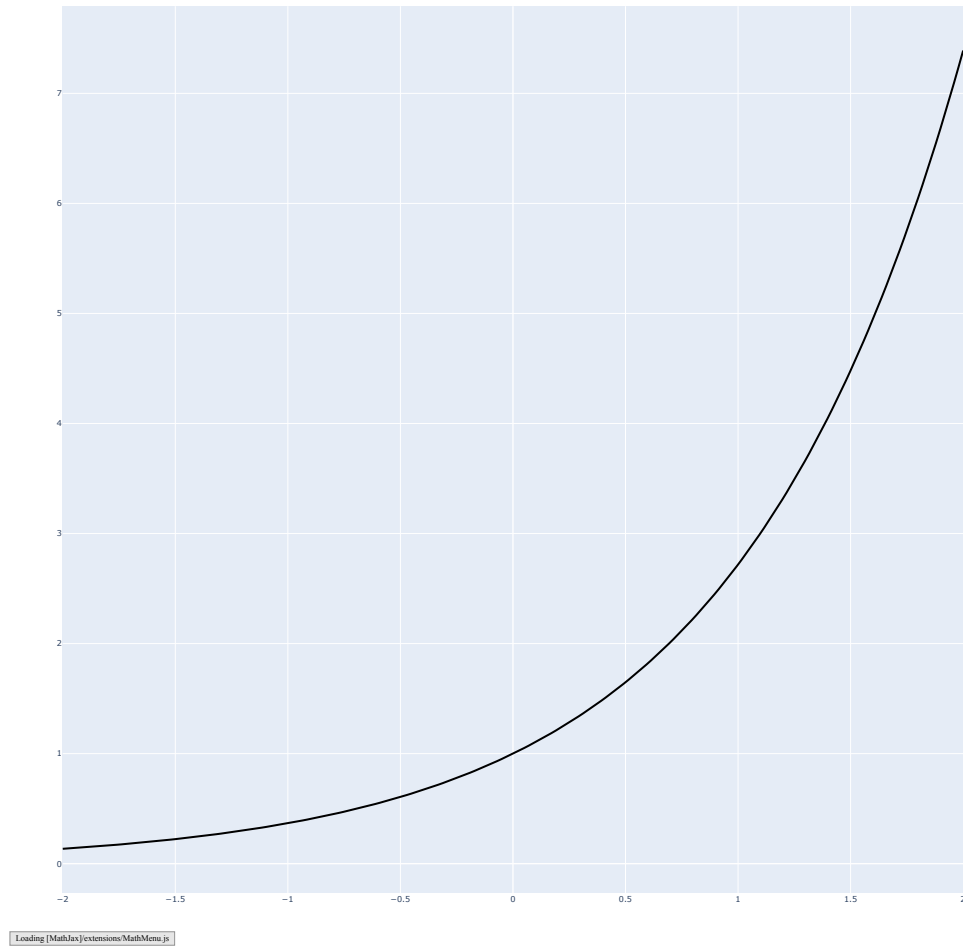
# Fungsi eksponensial asli
def e_x(x):
    return np.exp(x)

# Fungsi Taylor series hingga derajat n
def taylor_series(x, n):
    return np.array([
        sum((x_val**k) / factorial(k) for k in range(n + 1))
        for x_val in x
    ])

# Rentang x untuk plot
x_vals = np.linspace(-2, 2, 200)
y_actual = e_x(x_vals)

# Buat plot dengan Plotly
fig = go.Figure()

# Garis fungsi asli  $e^x$ 
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=x_vals, y=y_actual, mode='lines',
    name='e^x (Asli)', line=dict(color='black', width=3)
)))
```

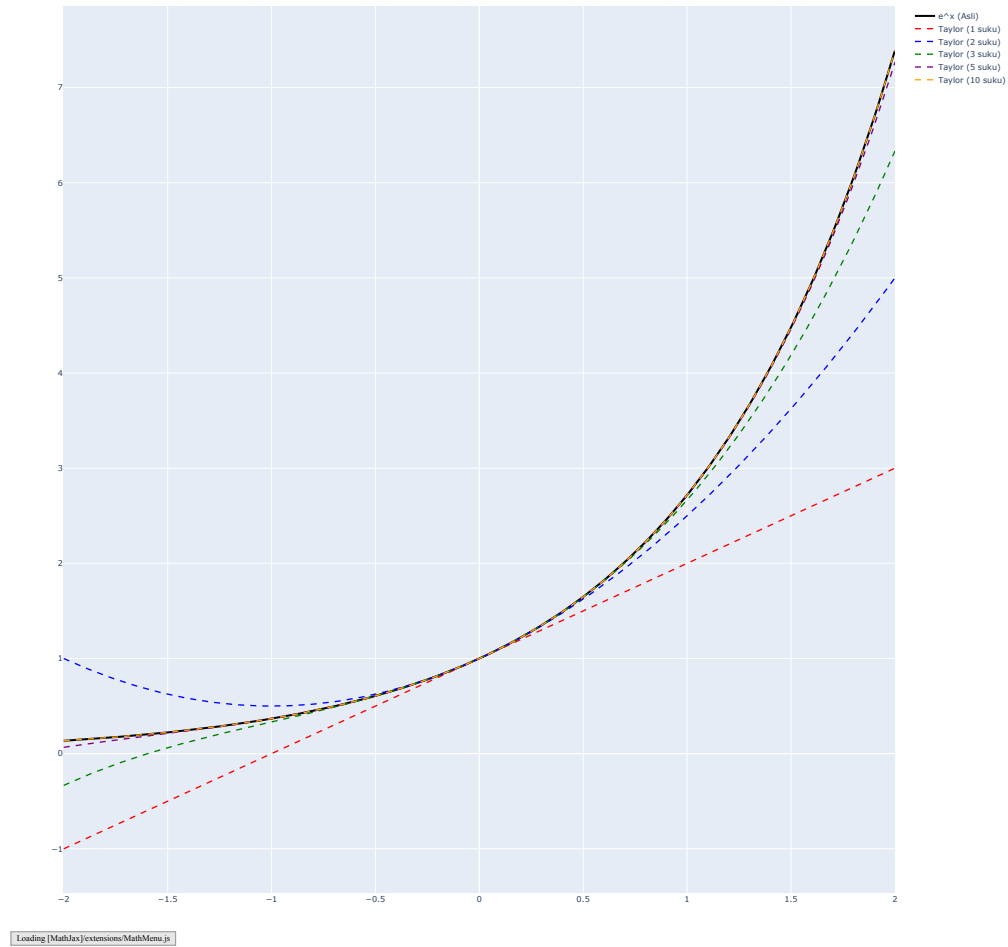


```

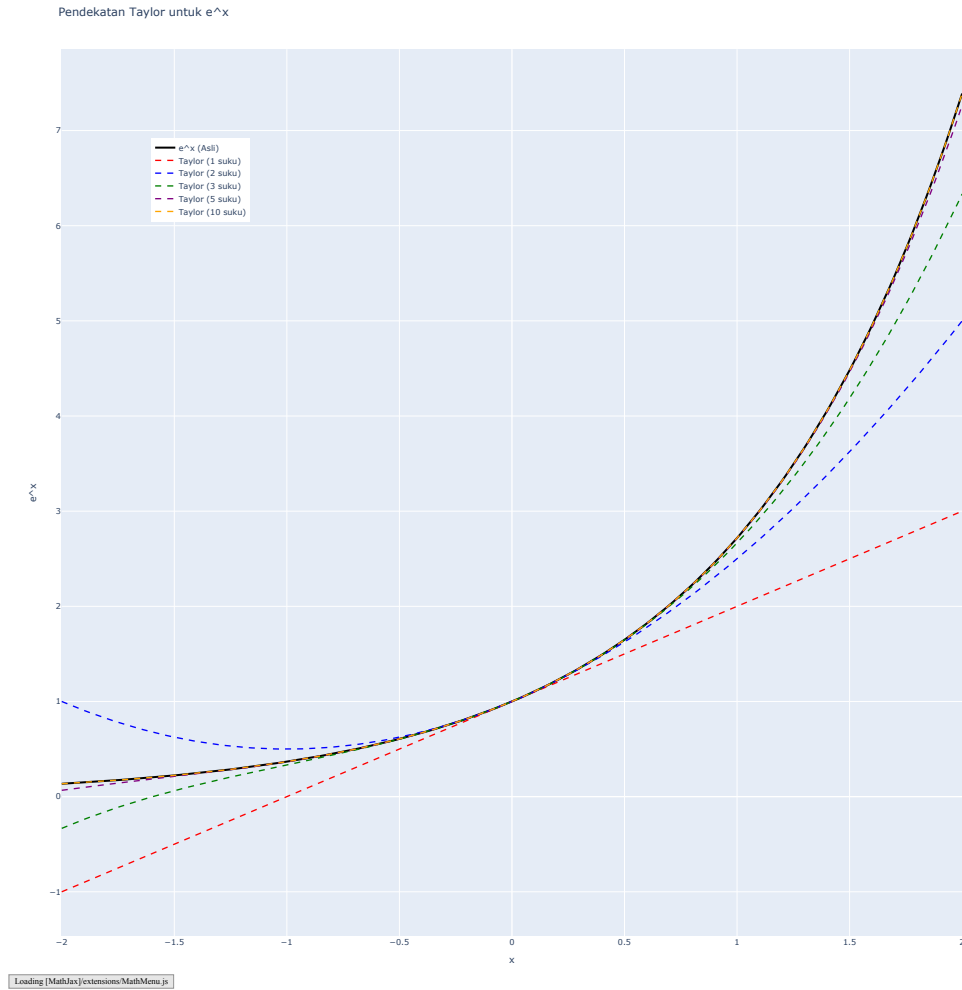
# Tambahkan pendekatan Taylor dengan berbagai jumlah suku
colors = ["red", "blue", "green", "purple", "orange"]
n_terms = [1, 2, 3, 5, 10] # Jumlah suku Taylor yang digunakan

for i, n in enumerate(n_terms):
    y_taylor = taylor_series(x_vals, n)
    fig.add_trace(go.Scatter(
        x=x_vals, y=y_taylor, mode='lines',
        name=f'Taylor ({n} suku)',
        line=dict(color=colors[i], dash='dash')
    ))

```



```
# Layout plot
fig.update_layout(
    title='Pendekatan Taylor untuk  $e^x$ ',
    xaxis_title='x',
    yaxis_title=' $e^x$ ',
    legend=dict(x=0.1, y=0.9)
)
```



4.3 Prediksi Deret Taylor

Fungsi deformasi tanah dalam tambang mengikuti persamaan:

$$u(t) = e^{-0.2t} \sin(2t)$$

dengan t dalam hari, dan $u(t)$ dalam meter.

Kita ingin **memprediksi deformasi tanah pada $t = 6$ menggunakan deret Taylor di sekitar $t = 5$.**

4.3.1 Rumus Deret Taylor

Deret Taylor di sekitar $t = 5$:

$$u(t) \approx u(5) + u'(5)(t-5) + \frac{u''(5)}{2!}(t-5)^2 + \frac{u'''(5)}{3!}(t-5)^3$$

- $u(5)$ = nilai fungsi pada $t = 5$
- $u'(t)$ = turunan pertama dari $u(t)$
- $u''(t)$ = turunan kedua dari $u(t)$
- $u'''(t)$ = turunan ketiga dari $u(t)$

Kita akan menghitung **turunan fungsi hingga orde ke-3**, mengevaluasi di $t = 5$, lalu menggunakan deret Taylor untuk menghitung $u(6)$.

4.3.2 Hitung Turunan $u(t)$

4.3.2.1 Nilai fungsi $t = 5$

$$u(5) = e^{-1} \cdot \sin(10) \approx 0.3679 \cdot (-0.5440) = 0.1353$$

4.3.2.2 Turunan pertama:

$$u'(t) = e^{-0.2t}(2 \cos(2t) - 0.2 \sin(2t))$$

$$u'(5) = e^{-1}(2 \cos(10) - 0.2 \sin(10)) \approx 0.3679 \cdot (-1.5694) = -0.1501$$

4.3.2.3 Turunan kedua:

$$u''(t) = e^{-0.2t}(-3.96 \sin(2t) - 0.8 \cos(2t))$$

$$u''(5) = e^{-1}(-3.96 \sin(10) - 0.8 \cos(10)) \approx -0.0824$$

4.3.2.4 Turunan ketiga:

$$u'''(t) = e^{-0.2t}(-7.76 \cos(2t) + 2.39 \sin(2t))$$

$$u'''(5) = e^{-1}(-7.76 \cos(10) + 2.39 \sin(10)) \approx 0.1102$$

4.3.3 Aproksimasi $u(6)$

Substitusi nilai turunan ke dalam deret Taylor:

$$u(6) \approx 0.1353 + (-0.1501)(1) + \frac{-0.0824}{2}(1)^2 + \frac{0.1102}{6}(1)^3$$

$$u(6) \approx 0.1353 - 0.1501 - 0.0412 + 0.0184 = -0.0376$$

4.3.4 Nilai Sebenarnya

$$u(6) = e^{-1.2} \cdot \sin(12) \approx 0.3012 \cdot (-0.1279) = -0.0385$$

4.3.5 Kesimpulan

Nilai	Hasil
Aproksimasi	-0.0376
Nilai Sebenarnya	-0.0385
Error	0.0009 meter (0.9 mm)

Aproksimasi sangat akurat, hanya selisih 0.9 mm dengan nilai aslinya.

4.4 Analogi Deret Taylor

Bayangkan kamu **berdiri di sebuah titik jalan** (anggap ini sebagai titik $x = a$ pada grafik fungsi). Misalnya kamu sedang jalan kaki di sebuah bukit, dan kamu **tidak punya peta lengkap**, tapi kamu tahu:

1. **Di mana posisi kamu sekarang**
→ Ini seperti **nilai fungsi** di titik itu:

$$f(a)$$

2. **Arah jalan saat ini (menanjak atau menurun)**
→ Ini seperti **turunan pertama**:

$$f'(a)$$

Semakin besar $f'(a)$, makin curam naiknya. Kalau negatif, berarti turun.

3. **Apakah jalan akan berbelok tajam atau tidak**
→ Ini seperti **turunan kedua**:

$$f''(a)$$

Kalau positif, jalan makin menanjak. Kalau negatif, jalan mulai melandai atau menurun.

4. **Bagaimana perubahan belokan itu sendiri**
→ Ini turunan ketiga, keempat, dst.
Semakin banyak turunan yang kamu tahu, semakin akurat prediksi kamu.

Chapter 5

Integral

5.1 Definisi Integral Tak Tentu

Integral tak tentu adalah kebalikan dari operasi **turunan** dalam kalkulus. Jika kita punya suatu **fungsi**, integral tak tentu mencari **fungsi asal** yang, ketika diturunkan, akan menghasilkan fungsi tersebut.

Misalnya, jika kita memiliki suatu **kecepatan** suatu objek yang bergerak, integral dari kecepatan tersebut akan memberi kita **posisi** objek tersebut setelah bergerak dalam waktu tertentu. Dengan kata lain, integral membantu kita “mencari fungsi yang hilang.”

Integral tak tentu dari suatu fungsi $f(x)$ ditulis seperti ini:

$$\int f(x) dx$$

Simbol $\int$ ini adalah simbol integral, yang berarti kita akan mencari fungsi yang hasil turunannya adalah $f(x)$. dx menunjukkan variabel yang digunakan (dalam hal ini x), dan hasilnya adalah fungsi **primitif** $F(x)$, yang ditambah dengan **konstanta integrasi** C .

Jadi, secara umum, kita menulis:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

- $F(x)$ adalah fungsi primitif (fungsi yang diturunkan untuk menghasilkan $f(x)$).
- C adalah **konstanta integrasi** (karena ada banyak fungsi yang diturunkan menjadi $f(x)$ yang berbeda hanya pada nilai konstanta).

Setiap kali kita mengambil turunan dari sebuah fungsi, nilai konstanta tidak akan terlihat. Misalnya, turunan dari $x^2 + 3$ dan $x^2 + 5$ adalah sama, yaitu $2x$. Karena itu, saat kita mengintegral, kita harus menambahkan konstanta C untuk menyatakan bahwa ada banyak fungsi primitif yang mungkin (berbeda hanya pada nilai konstanta).

Contoh Integral Tak Tentu 1:

Jika kita ingin mencari integral dari fungsi $f(x) = 2x$, kita mencari fungsi yang turunan dari fungsi tersebut menghasilkan $2x$. Fungsi tersebut adalah x^2 . Maka:

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

Di sini, kita menambahkan C karena ada banyak fungsi yang memiliki turunan $2x$, seperti $x^2 + 3$, $x^2 + 5$, dan seterusnya.

Contoh Integral Tak Tentu 2:

Jika kita ingin mencari integral dari $f(x) = 3$, yang berarti fungsi konstan. Fungsi yang jika diturunkan menghasilkan 3 adalah $3x$. Maka:

$$\int 3 \, dx = 3x + C$$

Integral tak tentu adalah cara untuk menemukan fungsi asal dari suatu fungsi yang sudah diketahui. Ini membantu kita memahami perubahan dari suatu fenomena (misalnya, perubahan posisi atau jumlah) dari waktu ke waktu. Konstanta C menunjukkan bahwa ada banyak solusi untuk integral yang sama, hanya berbeda pada nilai konstan.

5.2 Definisi Integral Tentu

Integral tentu adalah jumlah luas kurva dari $f(x)$ di antara batas a hingga b :

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

di mana $F(x)$ adalah **antiturunan** dari $f(x)$, yaitu fungsi yang apabila diturunkan akan menghasilkan $f(x)$.

Contoh:

Misalnya kita ingin menghitung integral dari fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[0, 2]$:

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

Langkah-langkah perhitungannya:

1. Temukan antiturunan dari x^2 , yaitu $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.
2. Evaluasi antiturunan pada batas atas ($x = 2$) dan batas bawah ($x = 0$):
 - $F(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 = \frac{8}{3}$
 - $F(0) = \frac{1}{3} \times 0^3 = 0$
3. Hitung selisihnya: $\frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$.

Hasilnya adalah $\frac{8}{3}$, yang menunjukkan luas area di bawah kurva x^2 dari $x = 0$ hingga $x = 2$.

Integral tentu sering digunakan untuk menghitung:

- **Luas area** di bawah suatu kurva antara dua batas tertentu.
- **Total jarak** yang ditempuh oleh objek dengan kecepatan yang berubah-ubah.
- **Total biaya** atau total pendapatan dalam konteks ekonomi atau bisnis.

5.3 Aturan Dasar Integrasi

5.3.1 Integral Fungsi-Fungsi Dasar

Integral merupakan proses kebalikan dari turunan. Integral tak tentu menghasilkan fungsi asal (primitif) dari suatu turunan, sedangkan integral tentu menghitung luas di bawah kurva antara dua titik.

Berikut adalah beberapa fungsi dasar dan integralnya yang sangat sering digunakan dalam Matematika Teknik:

Fungsi	Integral
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

5.3.2 Metode Substitusi

Metode substitusi digunakan untuk menyederhanakan bentuk integral dengan mengganti bagian dari fungsi menjadi variabel baru u . Ini sangat berguna ketika fungsi yang diintegrasikan adalah komposisi dari dua fungsi.

Jika $u = g(x)$, maka:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$$

Langkah-langkah:

1. Tentukan substitusi: $u = g(x)$
2. Hitung turunan $du = g'(x) dx$
3. Ganti semua x dan dx menjadi fungsi u dan du
4. Hitung integral dalam variabel u
5. Kembalikan ke variabel x

Contoh Soal

Hitung:

$$\int 2x \cos(x^2) dx$$

Langkah-langkah:

1. Substitusi:
 - $u = x^2$
 - $du = 2x \, dx$
2. Ganti ke bentuk u :
 - $\int 2x \cos(x^2) \, dx = \int \cos(u) \, du$
3. Hitung integral:
 - $\int \cos(u) \, du = \sin(u) + C$
4. Kembalikan ke variabel x :
 - $\sin(x^2) + C$

Jadi:

$$\int 2x \cos(x^2) \, dx = \sin(x^2) + C$$

Catatan:

- Metode substitusi sangat berguna dalam integral fungsi komposit.
- Jika Anda melihat suatu fungsi dan turunannya dalam bentuk integral, metode substitusi biasanya dapat digunakan.
- Metode ini adalah dasar dari **integrasi dengan perubahan variabel** dan penting dalam kalkulus teknik dan fisika.

5.3.3 Metode Integrasi Parsial

Integrasi parsial digunakan ketika fungsi yang diintegrasikan merupakan hasil kali dari dua fungsi yang berbeda. Metode ini berdasarkan pada aturan turunan dari hasil kali dua fungsi.

Jika $u = f(x)$ dan $dv = g(x) \, dx$, maka:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Langkah-langkah:

1. **Tentukan:** mana fungsi yang akan dijadikan u dan mana yang dv .
2. **Hitung:** turunan du dan integral v .
3. **Substitusikan** ke rumus: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$
4. **Selesaikan** integral sisanya.

Gunakan panduan **LIATE** untuk memilih u :

- **L:** Logaritma (mis. $\ln x$)
- **I:** Invers trigonometri (mis. $\tan^{-1} x$)
- **A:** Aljabar (mis. x, x^2)
- **T:** Trigonometri (mis. $\sin x, \cos x$)
- **E:** Eksponensial (mis. e^x)

Contoh Soal:

Hitung:

$$\int x e^x dx$$

Langkah-langkah:

1. Pilih:

- $u = x \Rightarrow du = dx$
- $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

2. Gunakan rumus:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

3. Selesaikan:

$$= x e^x - e^x + C$$

Catatan:

- Integrasi parsial sangat berguna untuk fungsi seperti:
 - $x \cdot e^x$
 - $x \cdot \ln x$
 - $x \cdot \sin x$
- Kadang proses harus diulang lebih dari satu kali, terutama jika fungsi u masih berisi variabel setelah integrasi pertama.

5.4 Penerapan Integrasi

5.4.1 Volume Benda Putar

Volume benda putar adalah volume yang terbentuk ketika suatu kurva atau daerah bidang diputar mengelilingi suatu sumbu. Ada beberapa metode utama untuk menghitungnya, yaitu:

5.4.1.1 Metode Cakram

Metode Cakram (Disk Method) digunakan ketika daerah diputar **mengelilingi sumbu horizontal** (misal: sumbu-x), dan **tidak berlubang** di tengah.

Rumus:

Jika daerah di antara $y = f(x)$, $x = a$, dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu-x:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Contoh Soal:

Menghitung volume lapisan batuan menggunakan Metode Cakram dengan profil $y = \sqrt{x}$, dari $x = 0$ sampai $x = 4$:

$$V = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = 8\pi$$

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

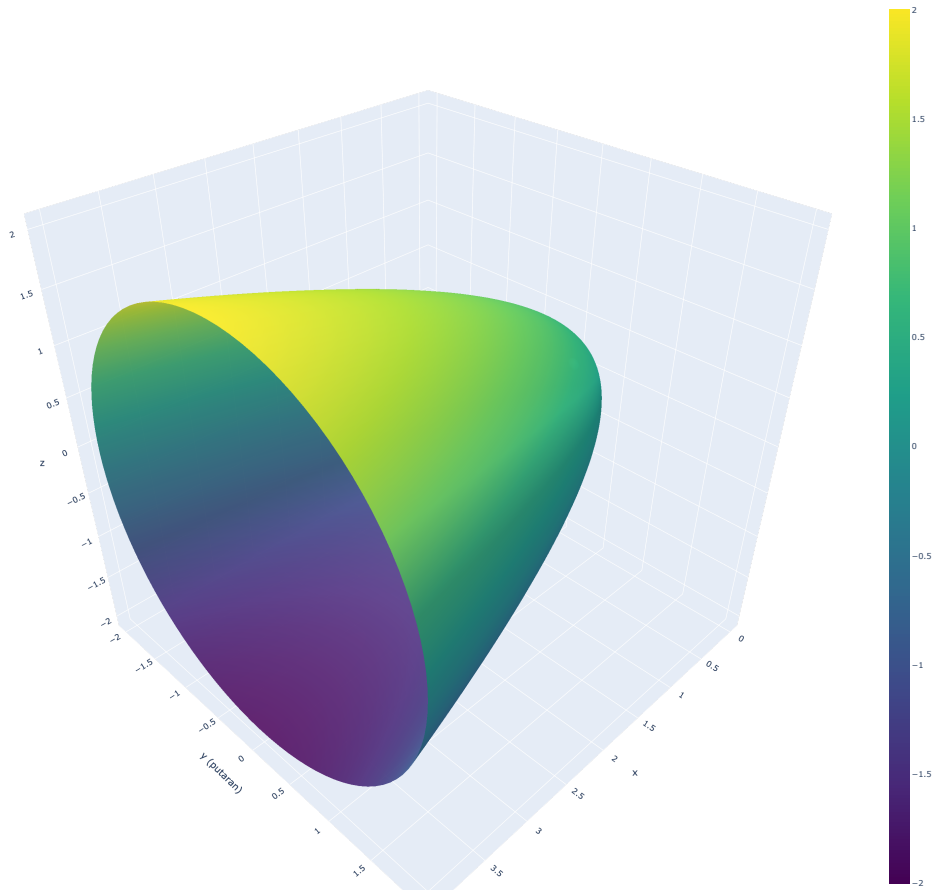
# Nilai x dan fungsi y = sqrt(x)
x = np.linspace(0, 4, 100)
y = np.sqrt(x)

# Buat permukaan revolusi (volume benda putar)
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
X, T = np.meshgrid(x, theta)
Y = np.sqrt(X)
Z = Y * np.cos(T)
W = Y * np.sin(T)

# Buat plot 3D
fig = go.Figure(data=[go.Surface(x=X, y=Z, z=W, colorscale='Viridis', opacity=0.9)])

# Layout
fig.update_layout(
    title='Volume Rotasi y = √x dari x = 0 ke x = 4 (Metode Cakram)',
    scene=dict(
        xaxis_title='x',
        yaxis_title='y (putaran)',
        zaxis_title='z'
    )
)
```

Volume Rotasi $y = \sqrt{x}$ dari $x = 0$ ke $x = 4$ (Metode Cakram)



5.4.1.2 Metode Cincin

Metode Cincin (Washer Method) digunakan ketika daerah yang diputar memiliki **lubang di tengah**, yaitu antara dua kurva, dan diputar terhadap sumbu horizontal seperti sumbu- x .

Rumus:

Jika daerah antara $y = f(x)$ (kurva atas) dan $y = g(x)$ (kurva bawah) diputar terhadap sumbu- x :

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

Contoh Soal:

Hitung volume benda yang dibentuk dari pemutaran daerah antara $y = \sqrt{x}$ dan $y = \frac{x}{2}$ dari $x = 0$ sampai $x = 4$ terhadap sumbu- x menggunakan **Metode Cincin**.

$$V = \pi \int_0^4 \left((\sqrt{x})^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right) dx = \pi \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{64}{12} \right) = \pi \left(8 - \frac{16}{3} \right) = \frac{8\pi}{3}$$

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

# Nilai x dan dua fungsi: y_outer = sqrt(x), y_inner = x/2
x = np.linspace(0, 4, 100)
y_outer = np.sqrt(x)
y_inner = x / 2

# Variabel rotasi
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
X, T = np.meshgrid(x, theta)

# Fungsi luar
Y_outer = np.sqrt(X)
Z_outer = Y_outer * np.cos(T)
W_outer = Y_outer * np.sin(T)

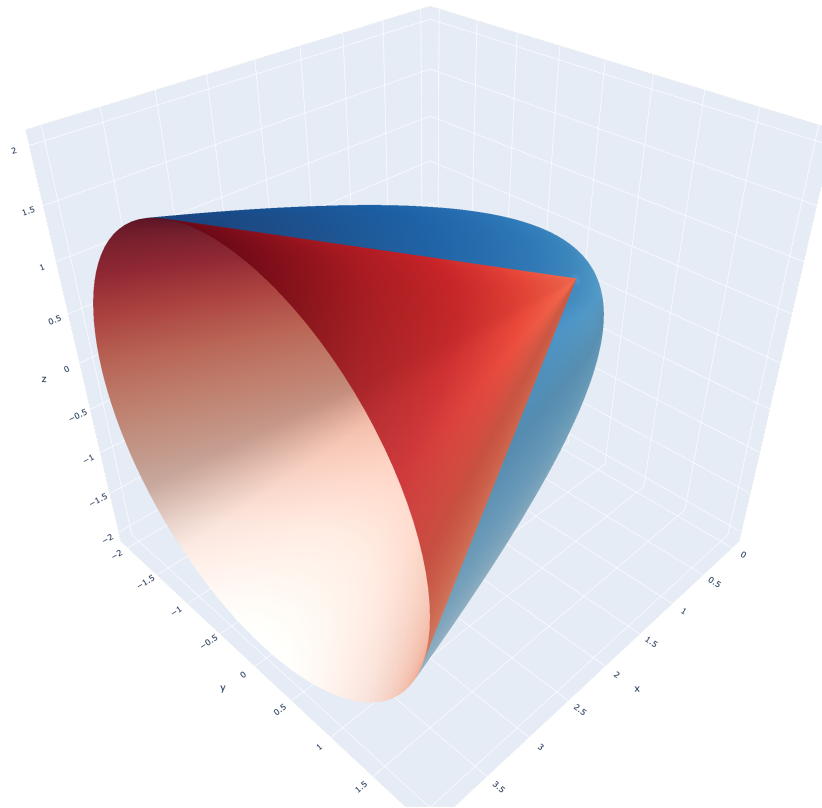
# Fungsi dalam
Y_inner = X / 2
Z_inner = Y_inner * np.cos(T)
W_inner = Y_inner * np.sin(T)

# Plot 3D permukaan luar dan dalam (lubang)
fig = go.Figure()

# Permukaan luar
fig.add_trace(go.Surface(x=X, y=Z_outer, z=W_outer, colorscale='Blues', opacity=0.8, show=
```

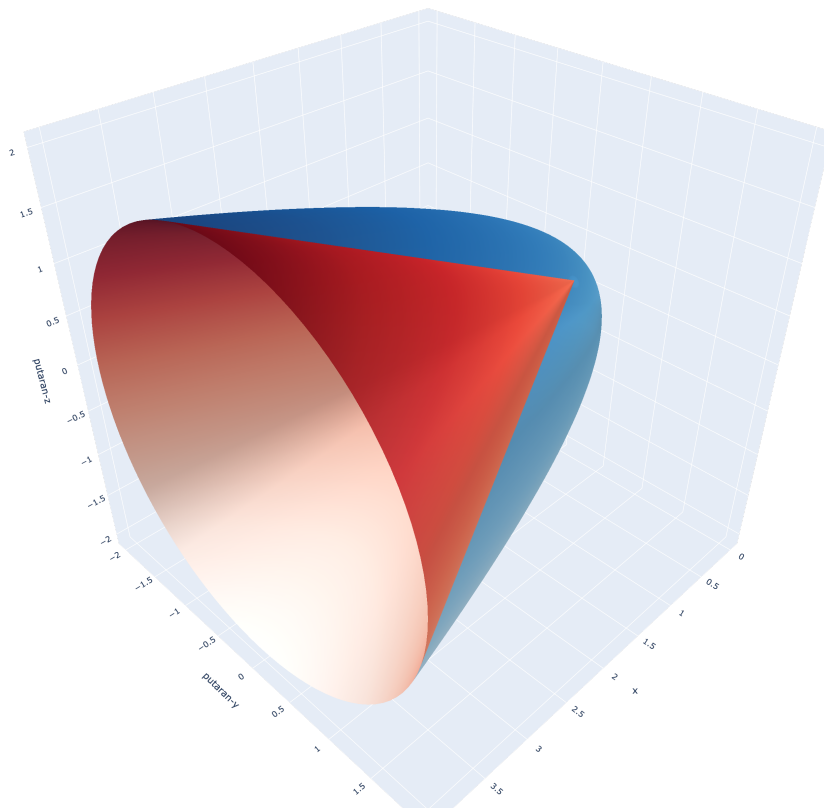


```
# Permukaan dalam (lubang)  
fig.add_trace(go.Surface(x=X, y=Z_inner, z=W_inner, colorscale='Reds', opacity=0.8, showscale=
```



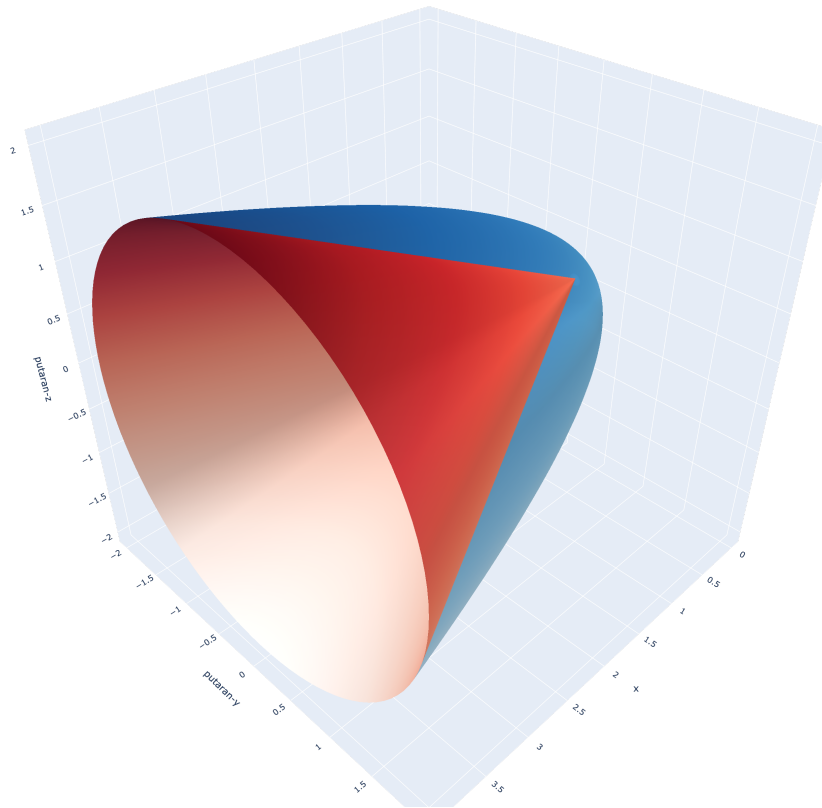
```
# Layout
fig.update_layout(
    title='Volume Rotasi antara  $y = \sqrt{x}$  dan  $y = x/2$  (Metode Cincin)',
    scene=dict(
        xaxis_title='x',
        yaxis_title='putaran-y',
        zaxis_title='putaran-z'
    ),
    showlegend=False
)
```

Volume Rotasi antara $y = \sqrt{x}$ dan $y = x/2$ (Metode Cincin)



```
fig.show()
```

Volume Rotasi antara $y = \sqrt{x}$ dan $y = x/2$ (Metode Cincin)



5.4.1.3 Metode Kulit Silinder

Metode Kulit Silinder (Shell Method) digunakan untuk menghitung volume benda yang diputar **mengelilingi sumbu vertikal** (misalnya: sumbu-y), terutama ketika memutar fungsi dalam bentuk x terhadap sumbu-y lebih mudah dibanding metode cakram/cincin.

Rumus:

Jika fungsi $y = f(x)$ diputar terhadap sumbu-y dari $x = a$ ke $x = b$, maka:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Contoh Soal:

Hitung volume benda yang dibentuk dari pemutaran daerah di bawah $y = \sqrt{x}$ dari $x = 0$ hingga $x = 4$ terhadap sumbu-y menggunakan **Metode Kulit Silinder**.

$$V = 2\pi \int_0^4 x \cdot \sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^4 = 2\pi \cdot \frac{2}{5} \cdot 32 = \frac{128\pi}{5}$$

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

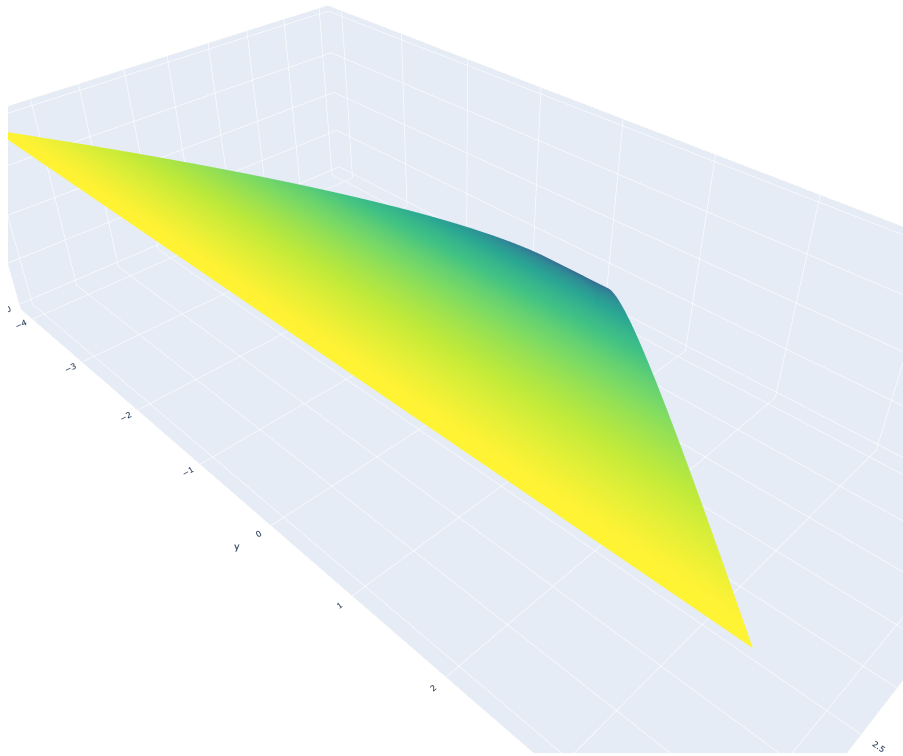
# x dan y = sqrt(x)
x = np.linspace(0, 4, 100)
y = np.sqrt(x)

# Variabel rotasi (theta)
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
X, T = np.meshgrid(x, theta)

# f(x) = sqrt(x), digunakan untuk menghitung permukaan silinder
Y = X * np.cos(T) # sumbu-y (melingkar)
Z = X * np.sin(T) # sumbu-z (melingkar)
H = np.sqrt(X)    # tinggi silinder

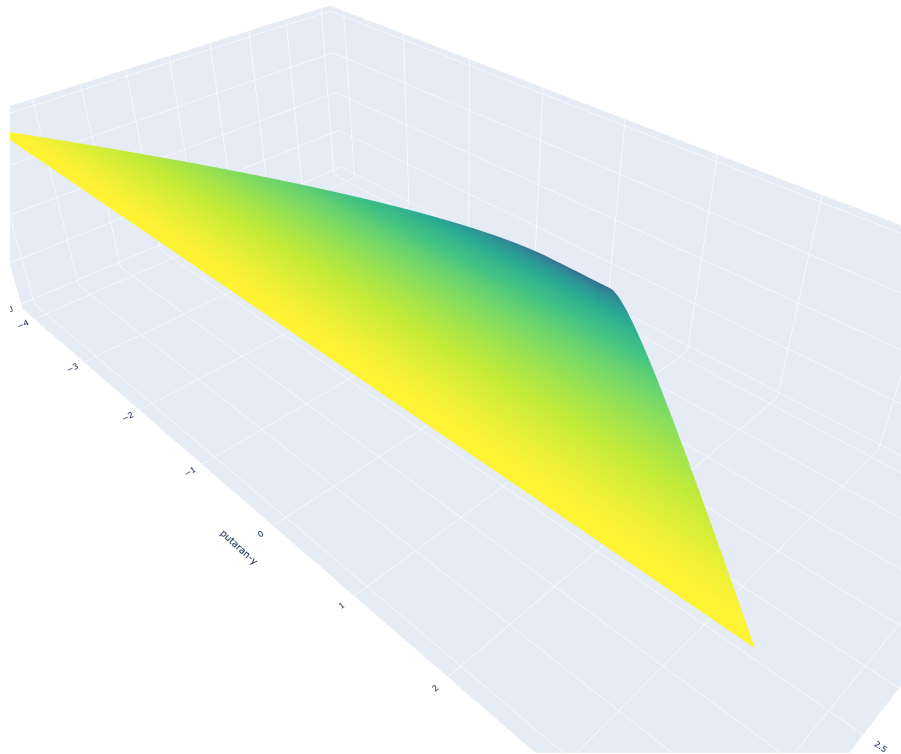
# Plot 3D permukaan silinder
fig = go.Figure()

fig.add_trace(go.Surface(
    x=X, y=Y, z=H, surfacecolor=H, colorscale='Viridis',
    showscale=False, opacity=0.9, name='Shell Surface'
)))
```



```
# Layout
fig.update_layout(
    title='Volume Rotasi  $y = \sqrt{x}$  dari  $x = 0$  ke  $x = 4$  (Metode Kulit Silinder)',
    scene=dict(
        xaxis_title='x (tinggi kulit)',
        yaxis_title='putaran-y',
        zaxis_title='z'
    ),
    showlegend=False
)
```

Volume Rotasi $y = \sqrt{x}$ dari $x = 0$ ke $x = 4$ (Metode Kulit Silinder)



5.4.2 Volume Kontur Penampang

Menghitung volume material antara dua penampang dapat dilakukan menggunakan beberapa pendekatan geometrik dan numerik. Berikut beberapa metode yang umum digunakan:

5.4.2.1 Metode Rata-Rata Penampang

Metode Rata-Rata Penampang (Average-End Area Method) digunakan untuk memperkirakan volume material antara dua penampang.

Rumus:

$$V = \frac{1}{2}h(A_1 + A_2)$$

Keterangan:

- h : jarak vertikal antara dua penampang
- A_1, A_2 : luas penampang bawah dan atas

Diberikan fungsi luas penampang:

- Penampang bawah:

$$A_1(x) = 150 + 20 \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) + 5e^{-0.1x}$$

- Penampang atas:

$$A_2(x) = 180 + 15 \cos\left(\frac{\pi x}{5}\right) + 8 \ln(x+1)$$

Jika diketahui:

- Interval x dari 0 hingga 10 satuan,
- Jarak antar penampang $h = 5$ satuan,

Hitung volume material menggunakan Metode Rata-Rata Penampang.

Langkah-langkah Penyelesaian

1. Hitung A_1 pada $x = 0$ dan $x = 10$.
2. Hitung A_2 pada $x = 0$ dan $x = 10$.
3. Terapkan rumus rata-rata penampang untuk menghitung volume.

Langkah 1: Hitung nilai area pada $x = 0$:

- $A_1(0) = 150 + 20 \sin(0) + 5e^0 = 150 + 0 + 5 = 155$
- $A_2(0) = 180 + 15 \cos(0) + 8 \ln(1) = 180 + 15 + 0 = 195$

Langkah 2: Hitung nilai area pada $x = 10$:

- $\sin\left(\frac{\pi \times 10}{5}\right) = \sin(2\pi) = 0$
- $\cos\left(\frac{\pi \times 10}{5}\right) = \cos(2\pi) = 1$
- $e^{-1} \approx 0.3679$
- $\ln(11) \approx 2.3979$

Sehingga:

- $A_1(10) = 150 + 20(0) + 5(0.3679) = 150 + 1.8395 = 151.8395$
- $A_2(10) = 180 + 15(1) + 8(2.3979) = 180 + 15 + 19.1832 = 214.1832$

Langkah 3: Rata-rata area:

- $A_{1,\text{rata}} = \frac{155+151.8395}{2} = 153.41975$
- $A_{2,\text{rata}} = \frac{195+214.1832}{2} = 204.5916$

Langkah 4: Hitung volume:

$$V = \frac{1}{2} \times 5 \times (153.41975 + 204.5916)$$

$$V = \frac{5}{2} \times 358.01135$$

$$V = 2.5 \times 358.01135$$

$$V \approx 895.0284 \text{ satuan volume}$$

Volume material ≈ 895.03 satuan volume.

Visualisasi 3D Fungsi Area

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

# Fungsi untuk penampang bawah dan atas
def A1(x):
    return 150 + 20 * np.sin(np.pi * x / 5) + 5 * np.exp(-0.1 * x)

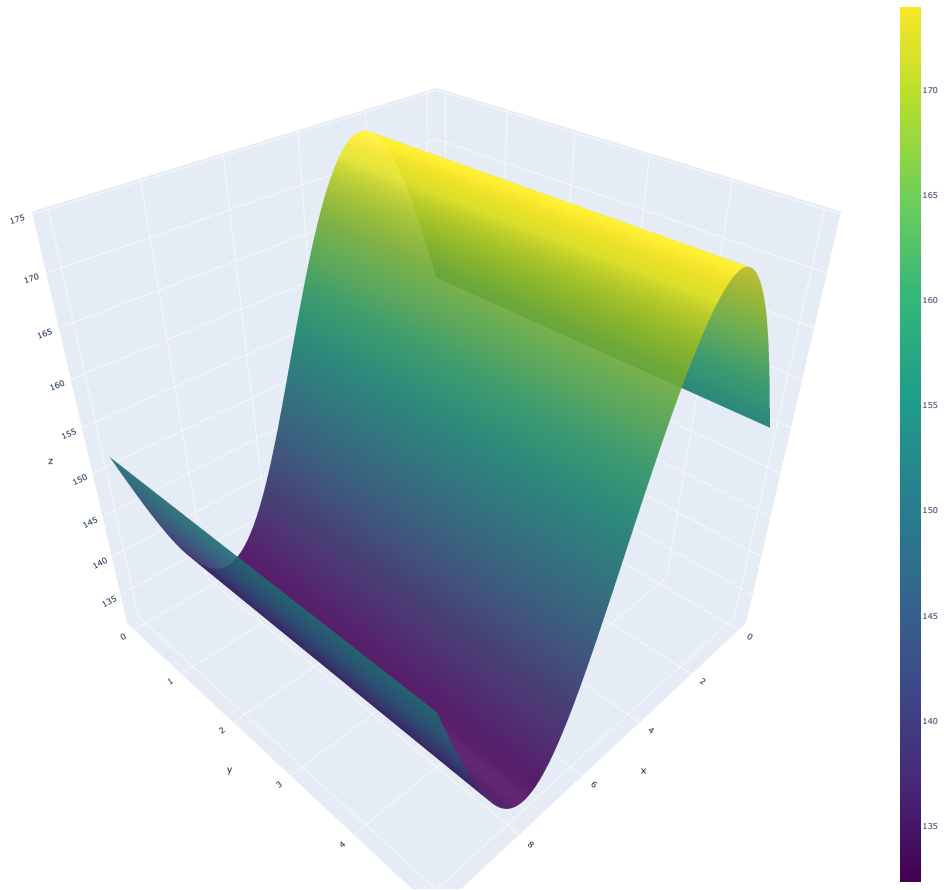
def A2(x):
    return 180 + 15 * np.cos(np.pi * x / 5) + 8 * np.log(x + 1)

# Grid x dan y
x = np.linspace(0, 10, 100)
y = np.linspace(0, 5, 10) # Jarak vertikal untuk memberi kedalaman
X, Y = np.meshgrid(x, y)

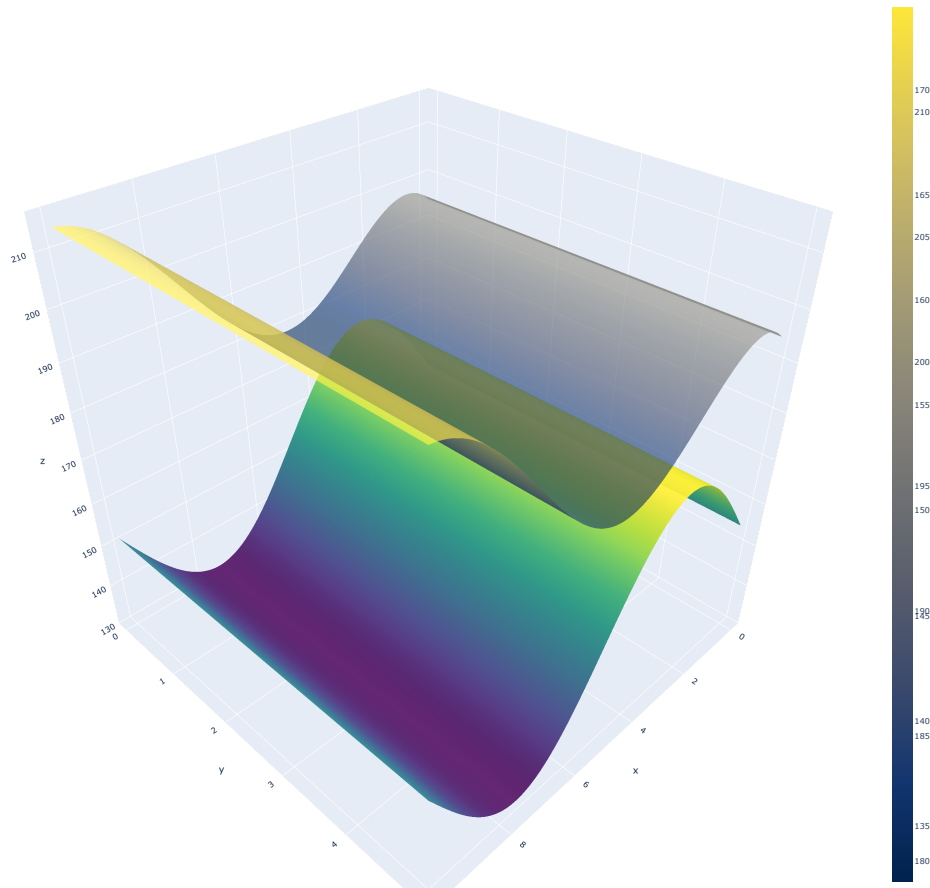
# Hitung Z untuk penampang bawah dan atas
Z1 = A1(X)
Z2 = A2(X)

# Buat plot 3D
fig = go.Figure()

# Tambahkan penampang bawah
fig.add_trace(go.Surface(z=Z1, x=X, y=Y, colorscale='Viridis', name='Penampang Bawah', opacit
```

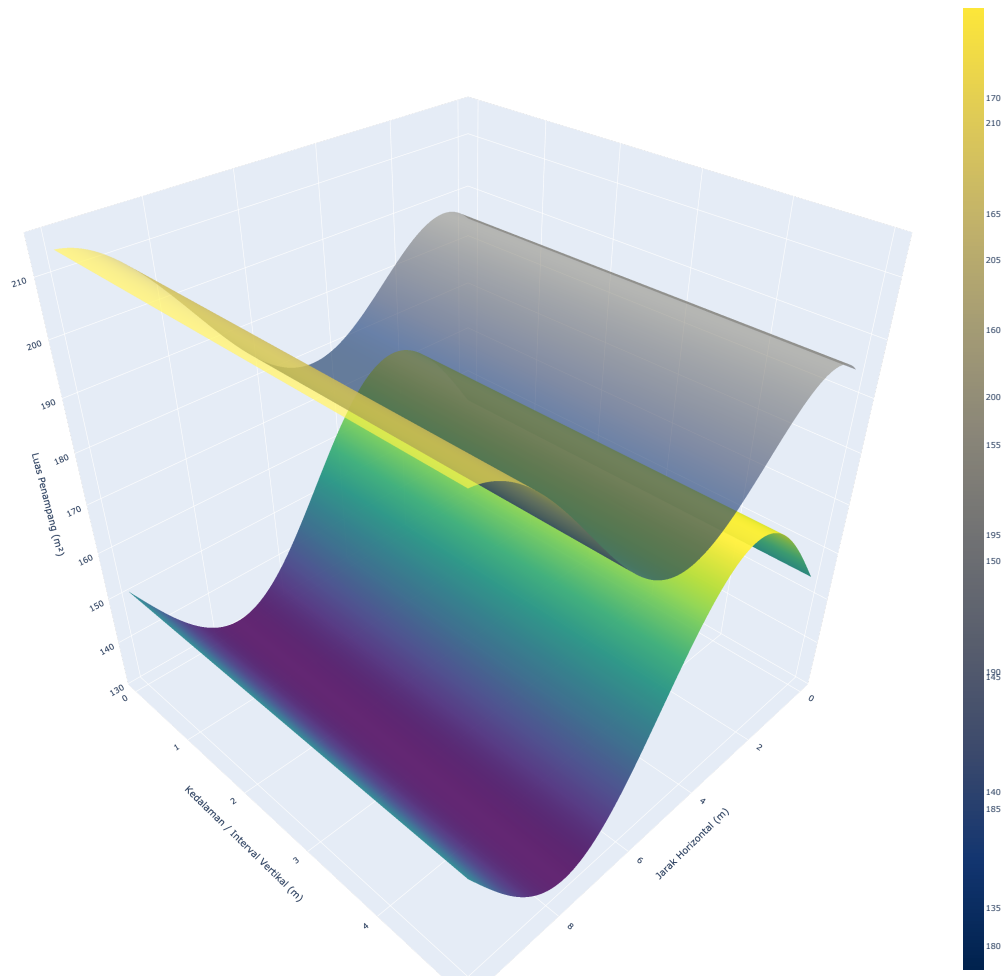


```
# Tambahkan penampang atas
fig.add_trace(go.Surface(z=Z2, x=X, y=Y, colorscale='Cividis', name='Penampang Atas', opa
```



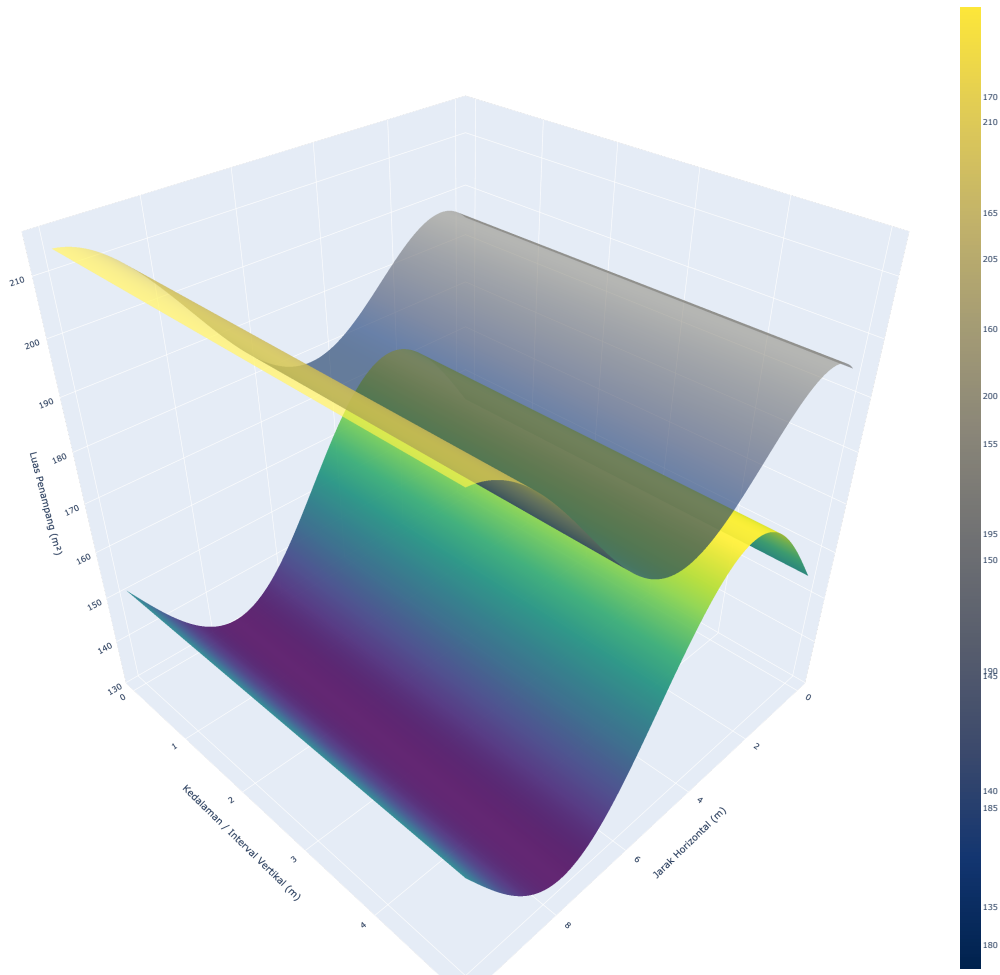
```
# Layout
fig.update_layout(
    title='Visualisasi Volume Cadangan Tambang antara Dua Penampang',
    scene=dict(
        xaxis_title='Jarak Horizontal (m)',
        yaxis_title='Kedalaman / Interval Vertikal (m)',
        zaxis_title='Luas Penampang (m²)'
    ),
    margin=dict(l=0, r=0, b=0, t=50)
)
```

Visualisasi Volume Cadangan Tambang antara Dua Penampang



```
fig.show()
```

Visualisasi Volume Cadangan Tambang antara Dua Penampang



5.4.2.2 Metode Prismoid

Metode **Prismoid** digunakan untuk menghitung volume material antara dua penampang dengan mempertimbangkan penampang tengah. Rumus Prismoid adalah sebagai berikut:

$$V = \frac{h}{6}(A_1 + 4A_m + A_2)$$

Keterangan:

- h : Jarak antara dua penampang
- A_1 : Luas penampang bawah (di $x = 0$)
- A_2 : Luas penampang atas (di $x = 10$)
- A_m : Luas penampang tengah (di $x = 5$)

Diketahui: Fungsi luas penampang bawah dan atas:

- Penampang bawah:

$$A_1(x) = 150 + 20 \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) + 5e^{-0.1x}$$

- Penampang atas:

$$A_2(x) = 180 + 15 \cos\left(\frac{\pi x}{5}\right) + 8 \ln(x+1)$$

Dengan:

- $x \in [0, 10]$
- $h = 10$

Langkah Penyelesaian:

Langkah 1, hitung $A_1(0)$

$$A_1(0) = 150 + 20 \sin(0) + 5e^0 = 150 + 0 + 5 = \boxed{155}$$

Langkah 2, hitung $A_2(10)$

$$\cos\left(\frac{\pi \cdot 10}{5}\right) = \cos(2\pi) = 1 \ln(11) \approx 2.3979$$

$$A_2(10) = 180 + 15(1) + 8(2.3979) = 180 + 15 + 19.1832 = \boxed{214.1832}$$

Langkah 3, hitung $A_m(5)$

$$\sin\left(\frac{\pi \cdot 5}{5}\right) = \sin(\pi) = 0 \cos\left(\frac{\pi \cdot 5}{5}\right) = \cos(\pi) = -1 \ln(6) \approx 1.7918$$

$$A_1(5) = 150 + 0 + 5e^{-0.5} \approx 150 + 0 + 5(0.6065) = 153.0325$$

$$A_2(5) = 180 + 15(-1) + 8(1.7918) = 180 - 15 + 14.3344 = 179.3344$$

$$A_m = \frac{A_1(5) + A_2(5)}{2} = \frac{153.0325 + 179.3344}{2} = \boxed{166.1834}$$

Hitung Volume

$$V = \frac{10}{6} (153.0325 + 4 \cdot 166.1834 + 179.3344)$$

$$V = \frac{10}{6} \cdot (155 + 664.7336 + 179.3344) = \frac{10}{6} \cdot 1033.9168$$

$$V \approx 1723.1947 \text{ satuan volume}$$

Volume Material

$$V \approx 1723.19 \text{ satuan volume}$$

Visualisasi 3D Penampang

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

# Fungsi penampang bawah dan atas
def A1(x):
    return 150 + 20 * np.sin(np.pi * x / 5) + 5 * np.exp(-0.1 * x)

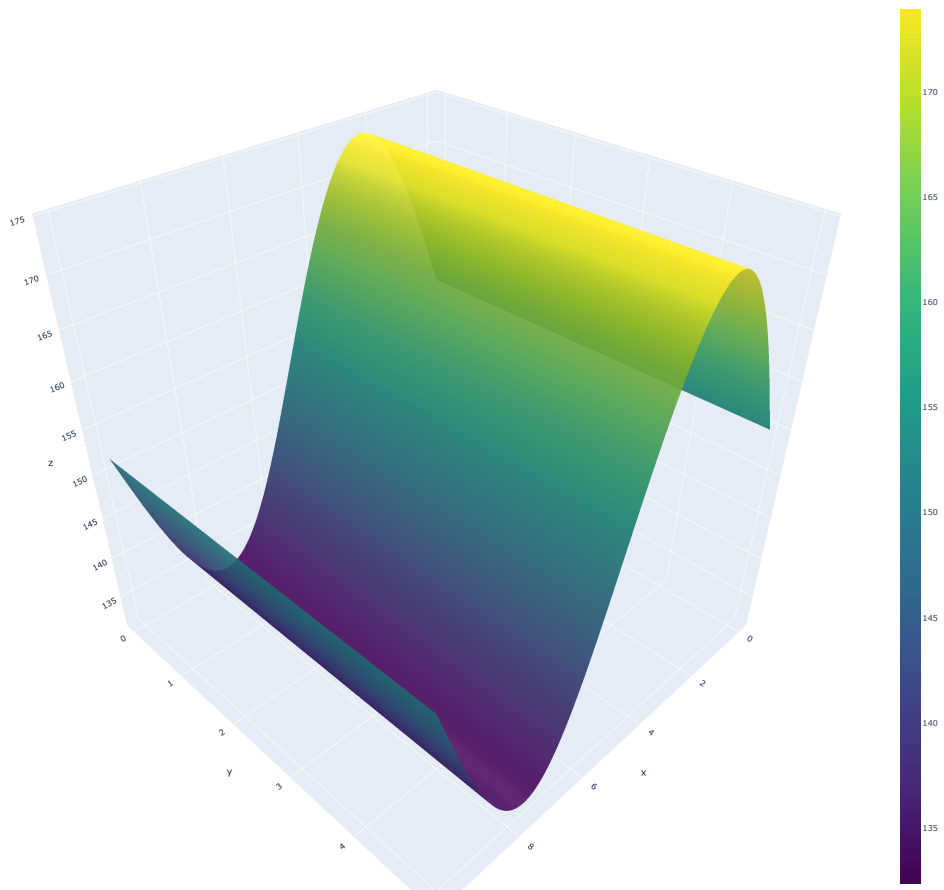
def A2(x):
    return 180 + 15 * np.cos(np.pi * x / 5) + 8 * np.log(x + 1)

# Grid x dan y
x = np.linspace(0, 10, 100)
y = np.linspace(0, 5, 10)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

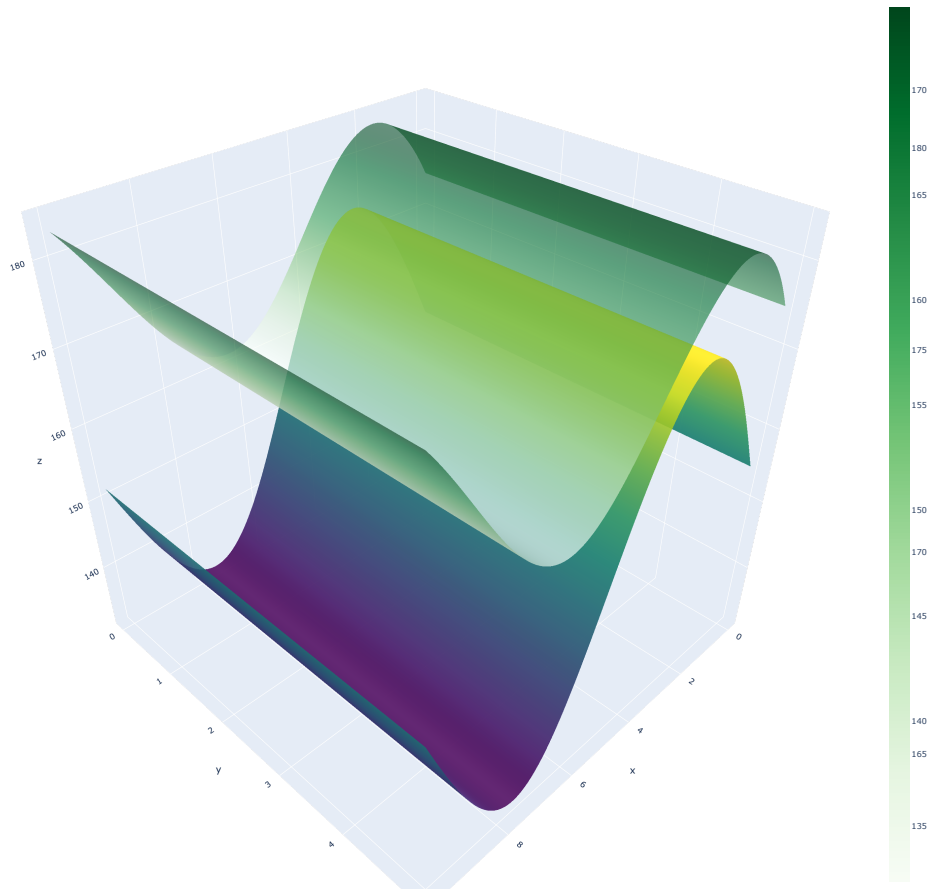
# Penampang
Z_bawah = A1(X)
Z_tengah = (A1(X) + A2(X)) / 2
Z_atas = A2(X)

# Plot 3D
fig = go.Figure()

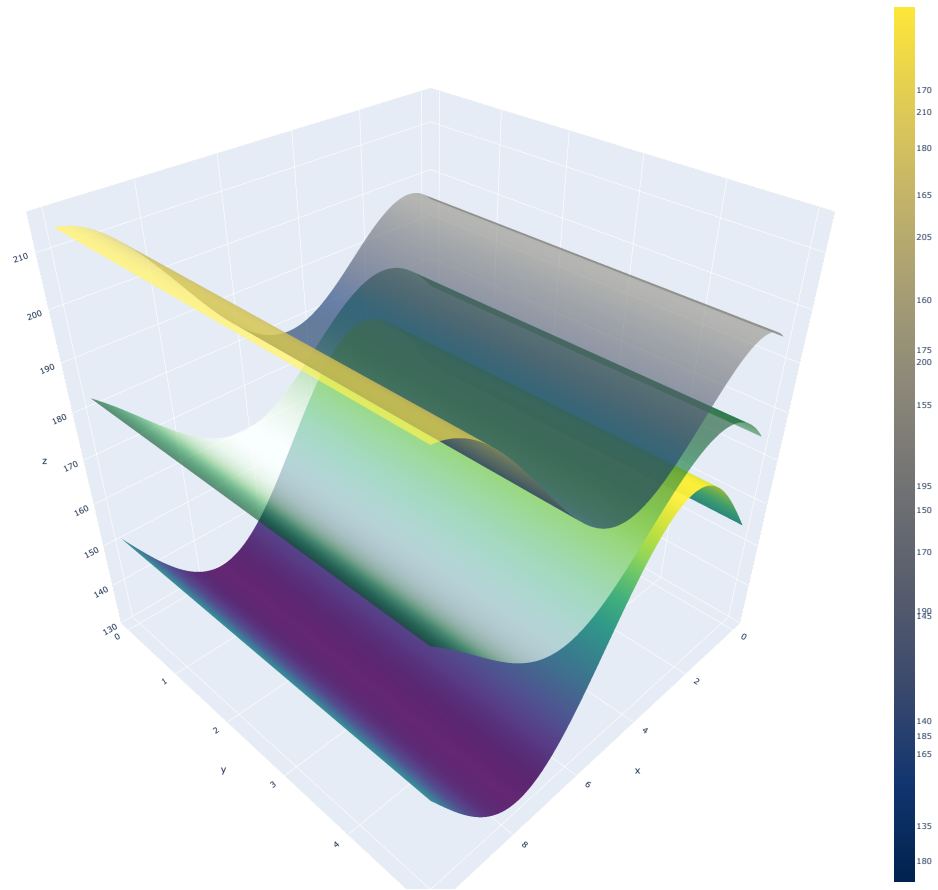
fig.add_trace(go.Surface(z=Z_bawah, x=X, y=Y, colorscale='Viridis', name='Penampang Bawah', o
```



```
fig.add_trace(go.Surface(z=Z_tengah, x=X, y=Y, colorscale='Greens', name='Penampang Tengah'))
```

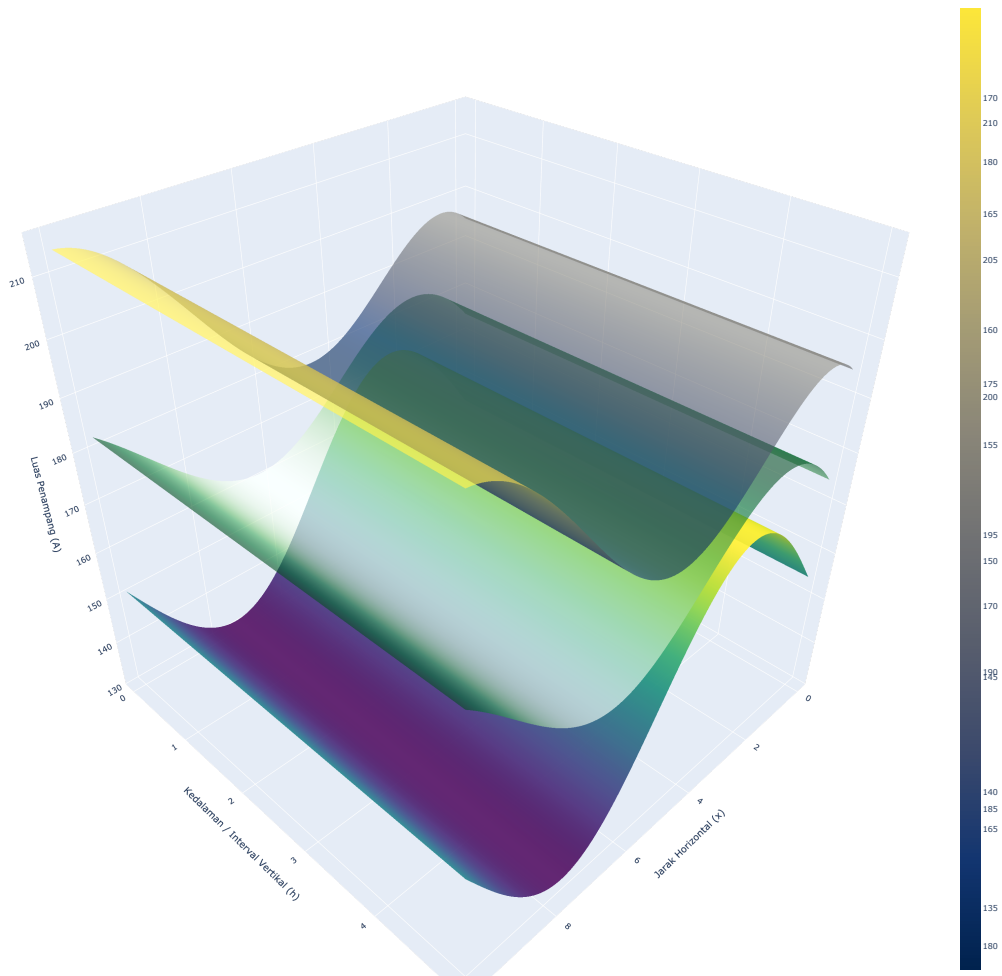


```
fig.add_trace(go.Surface(z=Z_atas, x=X, y=Y, colorscale='Cividis', name='Penampang Atas', opa
```



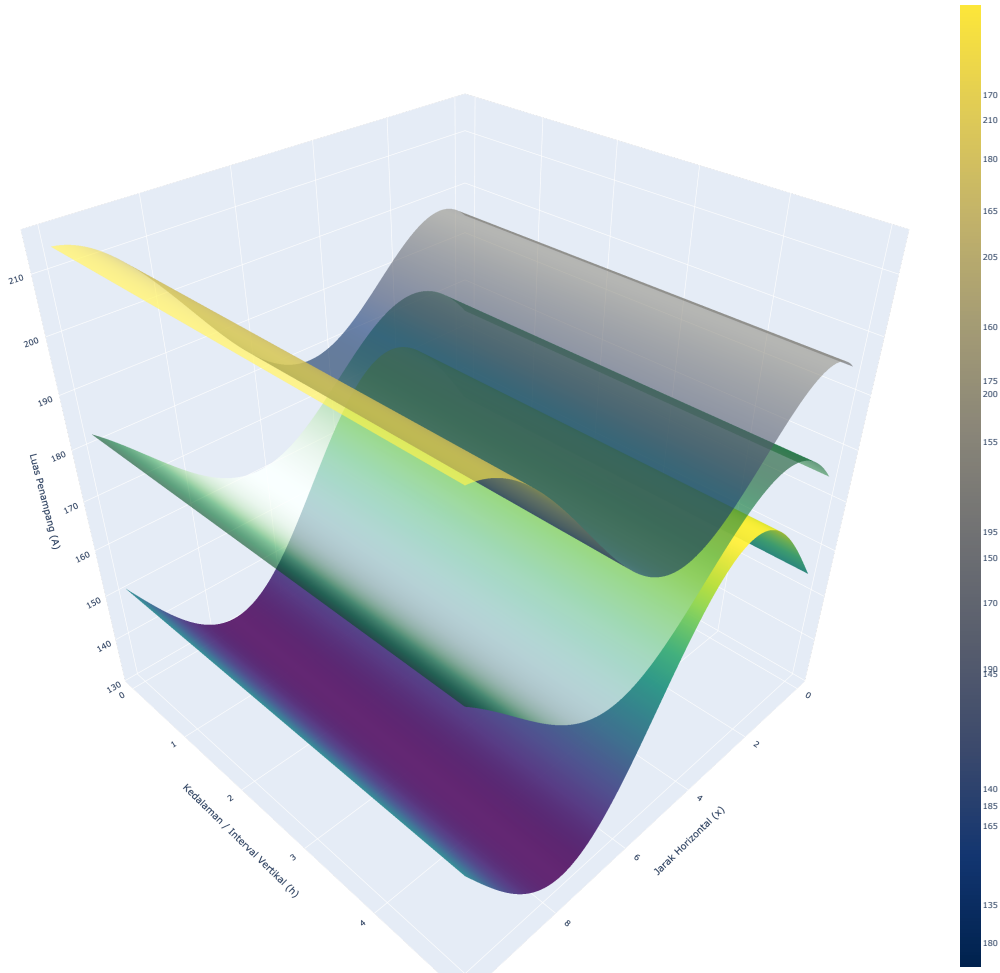
```
fig.update_layout(
    title='Visualisasi 3D Penampang Bawah, Tengah, dan Atas',
    scene=dict(
        xaxis_title='Jarak Horizontal (x)',
        yaxis_title='Kedalaman / Interval Vertikal (h)',
        zaxis_title='Luas Penampang (A)'
    ),
    margin=dict(l=0, r=0, b=0, t=50)
)
```

Visualisasi 3D Penampang Bawah, Tengah, dan Atas



```
fig.show()
```

Visualisasi 3D Penampang Bawah, Tengah, dan Atas



5.4.2.3 Metode Grid / Kontur

Metode **Grid / Kontur** (Contour Area Method) digunakan untuk menghitung volume material yang terperangkap antara beberapa kontur, sering digunakan pada peta topografi atau hasil pemetaan drone. Dalam metode ini, volume dihitung dengan memperkirakan volume antar pasangan kontur. Rumus Umum:

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} (A_i + A_{i+1}) \cdot h$$

Keterangan:

- V : Volume material antara kontur
- A_i : Luas kontur pada titik i
- A_{i+1} : Luas kontur pada titik $i + 1$
- h : Jarak vertikal antara dua kontur (biasanya jarak antar level kontur)

Diketahui:

Anda memiliki beberapa kontur yang membentuk area pada peta topografi atau hasil pemetaan drone. Misalkan ada beberapa titik kontur dengan nilai luas A_i dan A_{i+1} pada dua titik yang berdekatan. Anda juga mengetahui jarak vertikal antar kontur h .

Langkah Penyelesaian

Langkah 1: Tentukan Kontur dan Luas Area

Misalkan terdapat 5 kontur pada interval $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$, yang memiliki luas area masing-masing: A_1, A_2, A_3, A_4 , dan A_5 .

Langkah 2: Setiap Pasangan Kontur, untuk setiap pasangan kontur, volume dihitung dengan rumus:

$$V = \frac{1}{2}(A_i + A_{i+1}) \cdot h$$

Dimana:

- A_i dan A_{i+1} adalah luas kontur pada pasangan kontur.
- h adalah jarak vertikal antara dua kontur tersebut.

Langkah 3: Volume total dihitung dengan menjumlahkan volume dari setiap pasangan kontur:

$$V_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}(A_i + A_{i+1}) \cdot h$$

Contoh Perhitungan:

Misalkan kita memiliki lima kontur yang terpisah oleh jarak vertikal $h = 10$ satuan, dengan luas kontur sebagai berikut:

- $A_1 = 150$
- $A_2 = 170$
- $A_3 = 190$
- $A_4 = 210$
- $A_5 = 230$

Berikut adalah perhitungan volume antar setiap pasangan kontur.

Volume antara A_1 dan A_2 :

$$V_{1-2} = \frac{1}{2}(150 + 170) \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 320 \cdot 10 = 1600$$

Volume antara A_2 dan A_3 :

$$V_{2-3} = \frac{1}{2}(170 + 190) \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 360 \cdot 10 = 1800$$

Volume antara A_3 dan A_4 :

$$V_{3-4} = \frac{1}{2}(190 + 210) \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 10 = 2000$$

Volume antara A_4 dan A_5 :

$$V_{4-5} = \frac{1}{2}(210 + 230) \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 440 \cdot 10 = 2200$$

Jumlahkan Semua Volume

$$V_{\text{total}} = 1600 + 1800 + 2000 + 2200 = 7600 \text{ satuan volume}$$

Volume Material

$V_{\text{total}} = 7600 \text{ satuan volume}$

Visualisasi Volume Kontur

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

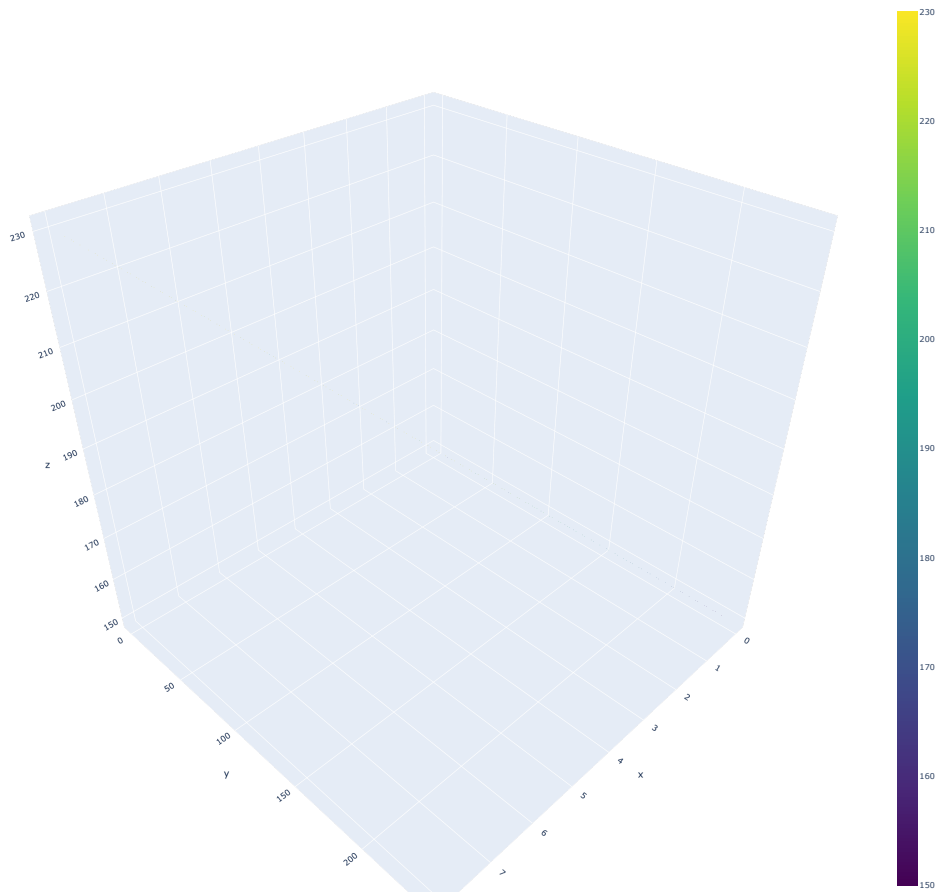
# Kontur data
kontur_x = [0, 2, 4, 6, 8]
kontur_y = [150, 170, 190, 210, 230]

# Membuat grid untuk visualisasi
x = np.linspace(0, 8, 100)
y = np.linspace(0, 240, 50)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Fungsi untuk mensimulasikan kontur
Z = np.interp(X, kontur_x, kontur_y)

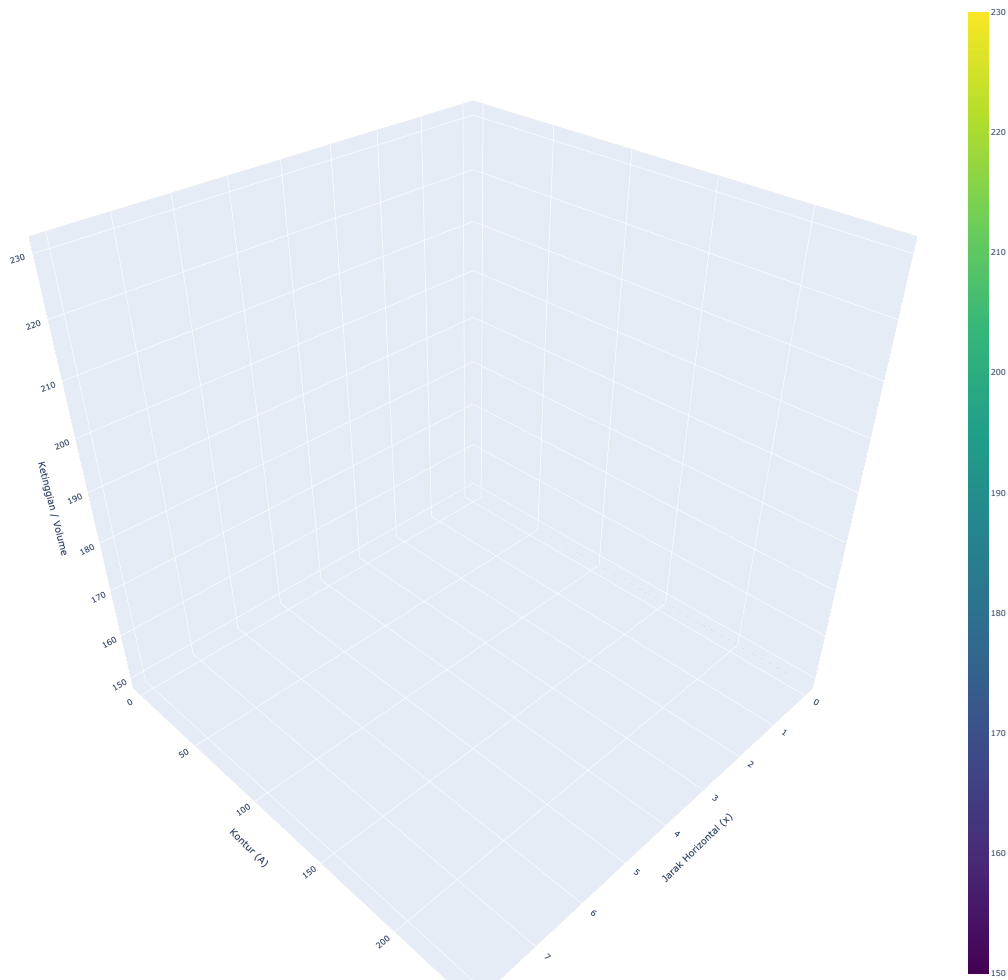
# Membuat plot 3D
fig = go.Figure()

fig.add_trace(go.Surface(z=Z, x=X, y=Y, colorscale='Viridis', opacity=0.9))
```



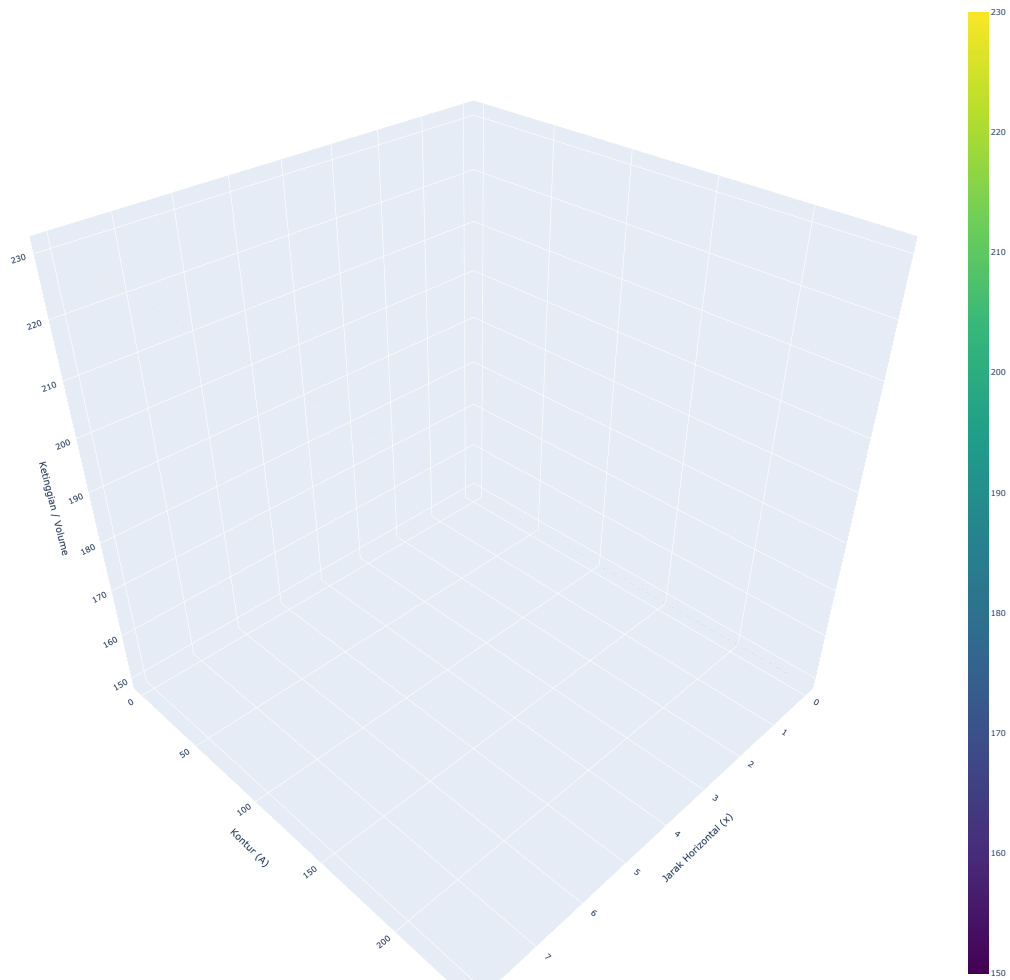
```
fig.update_layout(
    title='Visualisasi 3D Kontur dan Volume Material',
    scene=dict(
        xaxis_title='Jarak Horizontal (x)',
        yaxis_title='Kontur (A)',
        zaxis_title='Ketinggian / Volume'
    ),
    margin=dict(l=0, r=0, b=0, t=50)
)
```

Visualisasi 3D Kontur dan Volume Material



```
fig.show()
```

Visualisasi 3D Kontur dan Volume Material



5.4.2.4 Metode Cross-Section

Metode Cross-Section (Potongan Melintang) Digunakan ketika data penampang tersedia dalam bentuk potongan secara berkala (berderet).

Rumus:

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} (A_i + A_{i+1}) \cdot h_i$$

5.4.2.5 Metode Numerical Integration

Metode Numerical Integration digunakan jika fungsi area kontur ($A(x)$) diketahui secara matematis.

- **Metode Trapesium:**

$$V \approx \frac{h}{2}(A_1 + A_2)$$

- Metode Simpson 1/3 Rule (butuh 3 titik):

$$V \approx \frac{h}{3}(A_1 + 4A_m + A_2)$$

5.4.3 Stripping Ratio

Jika:

- V_o : volume overburden
- V_r : volume material berharga

Maka:

$$\text{Stripping Ratio} = \frac{V_o}{V_r}$$

Contoh penggunaan integral:

$$V_o = \int_a^b h_o(x) dx, \quad V_r = \int_a^b h_r(x) dx$$

5.4.4 Sebaran Ledakan Partikel

Luas di bawah kurva distribusi digunakan untuk menghitung persen kumulatif:

$$\text{Cumulative Mass \%} = \int_0^d f(x) dx$$

5.4.5 Estimasi Volume Cadangan

Diberikan fungsi $A(x) = 100 + 10x$, pada interval 0–10 (meter). Estimasi volume cadangan:

$$V = \int_0^{10} (100 + 10x) dx = [100x + 5x^2]_0^{10} = 1000 + 500 = 1500 \text{ m}^3$$

5.5 Latihan Soal

1. Hitung:

$$\int_1^3 (3x^2 - 2x + 1) dx$$

- Gunakan metode substitusi untuk menghitung:

$$\int x \cos(x^2) dx$$

- Hitung volume overburden dengan profil $h(x) = 10 - x$, $x = 0$ sampai $x = 5$
- Jika distribusi ukuran partikel mengikuti fungsi $f(x) = e^{-x}$, berapa persen partikel < 2 cm?

$$\int_0^2 e^{-x} dx$$

5.6 Latihan Studi Kasus

5.6.1 Cadangan Tambang

Deskripsi:

Sebuah penampang tambang menunjukkan bahwa luas penampang mineral di kedalaman tertentu dapat dimodelkan dengan fungsi:

$$A(x) = 120 + 15x - 0.5x^2$$

dengan $A(x)$ dalam m^2 dan x adalah kedalaman (meter), dari $x = 0$ hingga $x = 10$ meter.

Pertanyaan:

Hitung volume total cadangan dengan:

$$V = \int_0^{10} A(x) dx$$

5.6.2 Lapisan Tanah Penutup

Deskripsi:

Lapisan tanah penutup (overburden) memiliki ketebalan yang berubah-ubah dan dimodelkan dengan:

$$h_o(x) = 8 + 2 \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right)$$

x dalam meter (0–20 m). Panjang area ke arah dalam (tegak lurus sumbu x) adalah 50 m.

Pertanyaan:

- Hitung volume tanah penutup:

$$V = \int_0^{20} h_o(x) \cdot 50 dx$$

- Interpretasikan hasilnya dalam konteks logistik dan perencanaan alat berat.

5.6.3 Massa Total Material

Deskripsi:

Sebuah silo menyimpan material hasil galian dengan kerapatan bervariasi:

$$\rho(y) = 2.5 + 0.1y \quad (\text{ton/m}^3)$$

Luas alas silo = 10 m^2 , tinggi = 6 m .

Pertanyaan:

1. Hitung massa total material:

$$M = \int_0^6 \rho(y) \cdot 10 \, dy$$

2. Jelaskan bagaimana variasi kerapatan memengaruhi massa total.

5.6.4 Optimasi Volume Galian

Deskripsi:

Tambang terbuka memiliki profil penampang:

$$A(x) = 60x - 2x^2$$

dengan $x \in [0, 15]$ meter. Biaya per meter horizontal tergantung pada luas area:

$$C(x) = 50 \cdot A(x)$$

Pertanyaan:

1. Hitung volume penggalan:

$$V(a) = \int_0^a A(x) \, dx$$

2. Hitung biaya total penggalan:

$$T(a) = \int_0^a C(x) \, dx = 50 \int_0^a A(x) \, dx$$

3. Tentukan nilai a optimal (maksimum panjang penggalan) sebelum $A(x)$ menjadi nol untuk efisiensi maksimal.

5.6.5 Optimasi Produksi Tambang

Deskripsi:

Sebuah proyek tambang batu bara beroperasi selama 30 hari. Jumlah pekerja dan alat berat yang digunakan setiap hari diatur secara bertahap agar menyesuaikan kebutuhan lapangan:

- Jumlah pekerja harian dimodelkan sebagai:

$$P(t) = 30 + 10 \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right)$$

- Jumlah alat berat per hari dimodelkan sebagai:

$$M(t) = 10 + 2 \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right)$$

dengan t adalah hari ke- t , $0 \leq t \leq 30$.

Produksi harian batu bara (dalam ton) dimodelkan oleh:

$$Q(t) = 20 \cdot P(t)^{0.6} \cdot M(t)^{0.4}$$

Pertanyaan:

1. Tentukan total produksi batu bara selama 30 hari.

$$\text{Total produksi} = \int_0^{30} Q(t) dt$$

2. Jika biaya gaji per pekerja per hari adalah Rp 500.000 dan biaya sewa alat berat per unit per hari adalah Rp 2.000.000, tentukan:

- Total biaya selama 30 hari:

$$\text{Biaya total} = \int_0^{30} [500,000 \cdot P(t) + 2,000,000 \cdot M(t)] dt$$

3. Hitung rata-rata produksi per biaya:

$$\text{Efisiensi produksi} = \frac{\int_0^{30} Q(t) dt}{\int_0^{30} [500,000 \cdot P(t) + 2,000,000 \cdot M(t)] dt}$$

Chapter 6

Metode Numerik

Dalam Teknik Pertambangan, banyak fenomena rekayasa yang bersifat kompleks dan memerlukan pendekatan matematika untuk dianalisis. Persamaan nonlinear muncul dalam berbagai aplikasi, seperti perhitungan aliran air tanah di tambang, tekanan gas pada ventilasi bawah tanah, dan karakteristik batuan yang tidak linier.

Persamaan nonlinear adalah persamaan dalam bentuk umum $f(x) = 0$, di mana $f(x)$ **bukan fungsi linear**, melainkan melibatkan eksponen, logaritma, trigonometri, eksponensial, atau kombinasi bentuk nonlinear lainnya.

6.1 Persamaan Nonlinear

Berikut adalah beberapa bentuk umum persamaan nonlinear yang sering muncul dalam permasalahan teknik pertambangan, lengkap dengan contoh aplikasinya:

6.1.1 Kuadrat (Parabolik)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Contoh aplikasi: Perhitungan **trajektori material** saat proses peledakan, atau untuk **menganalisis kestabilan lereng** berdasarkan ketinggian dan jarak. Misalnya, tinggi maksimum material yang dilempar ke udara setelah peledakan: $h(t) = -4.9t^2 + 20t + 2$. Di mana t adalah waktu dalam detik, dan $h(t)$ adalah ketinggian.

6.1.2 Polinomial Tingkat Tinggi

$$f(x) = x^3 - 5x + 2$$

Contoh aplikasi: Modeling **hubungan nonlinear antara tekanan, suhu, dan volume** dalam sistem termodinamika tambang bawah tanah, atau **estimasi deformasi struktur tambang** akibat gaya-gaya kompleks.

6.1.3 Eksponensial

$$f(x) = e^{-kx} - P$$

Contoh aplikasi: Menjelaskan **peluruhan tekanan** dalam sistem pipa ventilasi tambang bawah tanah atau **penurunan kandungan bahan kimia** selama proses leaching. Contoh: $f(x) = e^{-0.3x} - 0.5$, digunakan untuk melihat kapan tekanan menurun di bawah batas aman.

6.1.4 Logaritmik

$$f(x) = \ln(x) - a$$

Contoh aplikasi: Menentukan hubungan antara **porositas batuan** dan **permeabilitas** dalam simulasi aliran fluida di bawah permukaan. Misalnya: $\ln(k) = \phi - 2.3$, dengan ϕ adalah porositas, k adalah permeabilitas.

6.1.5 Trigonometri

$$f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$$

Contoh aplikasi: Model **gelombang seismik** dalam proses eksplorasi geofisika, atau untuk **analisis getaran akibat peledakan** pada tambang terbuka. Digunakan untuk memodelkan perubahan intensitas gelombang terhadap jarak dan waktu dari sumber getaran.

6.2 Metode Penyelesaian

Karena banyak persamaan nonlinear tidak dapat diselesaikan secara analitik, maka kita menggunakan **Metode Numerik (Iteratif)** untuk mencari akar (solusi) dari $f(x) = 0$. Metode numerik yang umum digunakan antara lain:

6.2.1 Metode Biseksi

Metode Biseksi bekerja dengan **mempersempit interval** $[a, b]$ yang mengandung akar.

Langkah:

1. Hitung $f(a)$ dan $f(b)$, pastikan $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. Hitung titik tengah $c = \frac{a+b}{2}$
3. Evaluasi $f(c)$
4. Tentukan subinterval baru $[a, c]$ atau $[c, b]$ tergantung tanda
5. Ulangi hingga konvergen

Contoh Terapan Metode Biseksi

Dalam dunia pertambangan, banyak fenomena fisik yang dimodelkan dengan **persamaan nonlinear**, misalnya tekanan air pori, tekanan gas, gelombang seismik, hingga porositas batuan.

Salah satu contoh bentuk fungsi nonlinear adalah:

$$f(x) = x^2 - 5$$

Tujuan kita adalah mencari nilai x sedemikian sehingga:

$$f(x) = 0$$

Pilih Interval Awal $[a, b]$

Karena kita ingin mencari akar positifnya, kita pilih interval awal di sekitar $x = 2.236$.

- Coba $x = 2$, $f(2) = 4 - 5 = -1$ (negatif)
- Coba $x = 3$, $f(3) = 9 - 5 = 4$ (positif)

Karena terjadi **perubahan tanda**:

$$f(2) \cdot f(3) = (-1)(4) = -4 < 0$$

Maka interval awal yang valid adalah:

$$[a, b] = [2, 3]$$

Algoritma Metode Biseksi

Iterasi metode biseksi dilakukan dengan mencari titik tengah:

$$c = \frac{a + b}{2}$$

dan menghitung $f(c)$. Jika $f(c) = 0$, maka c adalah akar. Jika tidak, kita periksa tanda dari $f(c)$:

- Jika $f(a) \cdot f(c) < 0$, maka akar ada di $[a, c]$
- Jika $f(c) \cdot f(b) < 0$, maka akar ada di $[c, b]$

Iterasi dilanjutkan hingga panjang interval $|b - a| < \varepsilon$, dengan ε adalah **toleransi error**, misalnya $\varepsilon = 0.001$.

Tabel Iterasi

Table 6.1: Iterasi Metode Bisection untuk Akar dari $f(x) = x^2 - 5$

Iterasi	a	b	$c = (a+b)/2$	$f(c)$	Interval Baru
1	2.000000	2.500000	2.50000000	1.2500000	[2.000000, 2.500000]
2	2.000000	2.250000	2.25000000	0.0625000	[2.000000, 2.250000]
3	2.125000	2.250000	2.12500000	-0.4843750	[2.125000, 2.250000]
4	2.187500	2.250000	2.18750000	-0.2148438	[2.187500, 2.250000]
5	2.218750	2.250000	2.21875000	-0.0771484	[2.218750, 2.250000]
6	2.234375	2.250000	2.23437500	-0.0075684	[2.234375, 2.250000]

Iterasi	a	b	$c = (a+b)/2$	$f(c)$	Interval Baru
7	2.234375	2.242188	2.24218750	0.0274048	[2.234375, 2.242188]
8	2.234375	2.238281	2.23828125	0.0099030	[2.234375, 2.238281]
9	2.234375	2.236328	2.23632812	0.0011635	[2.234375, 2.236328]
10	2.235352	2.236328	2.23535156	-0.0032034	[2.235352, 2.236328]
11	2.235840	2.236328	2.23583984	-0.0010202	[2.235840, 2.236328]
12	2.235840	2.236084	2.23608398	7.1585e-05	[2.235840, 2.236084]
13	2.235962	2.236084	2.23596191	-0.0004743	[2.235962, 2.236084]
14	2.236023	2.236084	2.23602295	-0.0002014	[2.236023, 2.236084]
15	2.236053	2.236084	2.23605347	-6.4894e-05	[2.236053, 2.236084]
16	2.236053	2.236069	2.23606873	3.3455e-06	[2.236053, 2.236069]
17	2.236061	2.236069	2.23606110	-3.0774e-05	[2.236061, 2.236069]
18	2.236065	2.236069	2.23606491	-1.3714e-05	[2.236065, 2.236069]
19	2.236067	2.236069	2.23606682	-5.1844e-06	[2.236067, 2.236069]
20	2.236068	2.236069	2.23606777	-9.1942e-07	[2.236068, 2.236069]

Konvergensi

Panjang interval akhir:

$$|b - a| = |2.235839844 - 2.235351563| = 0.000488281 < 0.001$$

Sehingga solusi telah konvergen pada:

$$x \approx 2.2358$$

Visualisasi Metode Biseksi

Berikut ini dilampirkan Kode Python untuk memperlihatkan proses pencarian titik penyelesaiannya dengan menggunakan Metode Secant secara visual.

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

# Fungsi yang ingin dicari akarnya
def f(x):
    return x**2 - 5

# Fungsi Metode Biseksi
def bisection_iterations(f, a0, b0, tol=1e-3, max_iter=20):
    iterations = []
    a, b = a0, b0
    for i in range(max_iter):
        c = (a + b) / 2
        fc = f(c)
        iterations.append((i + 1, a, b, c, fc))
        if abs(fc) < tol or abs(b - a) < tol:
            break
```

```

        if f(a) * fc < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return iterations

# Parameter awal
a0, b0 = 2, 3
iter_data = bisection_iterations(f, a0, b0)

# Nilai untuk visualisasi fungsi
x_vals = np.linspace(1.5, 3.5, 400)
y_vals = f(x_vals)
min_y, max_y = min(y_vals), max(y_vals)

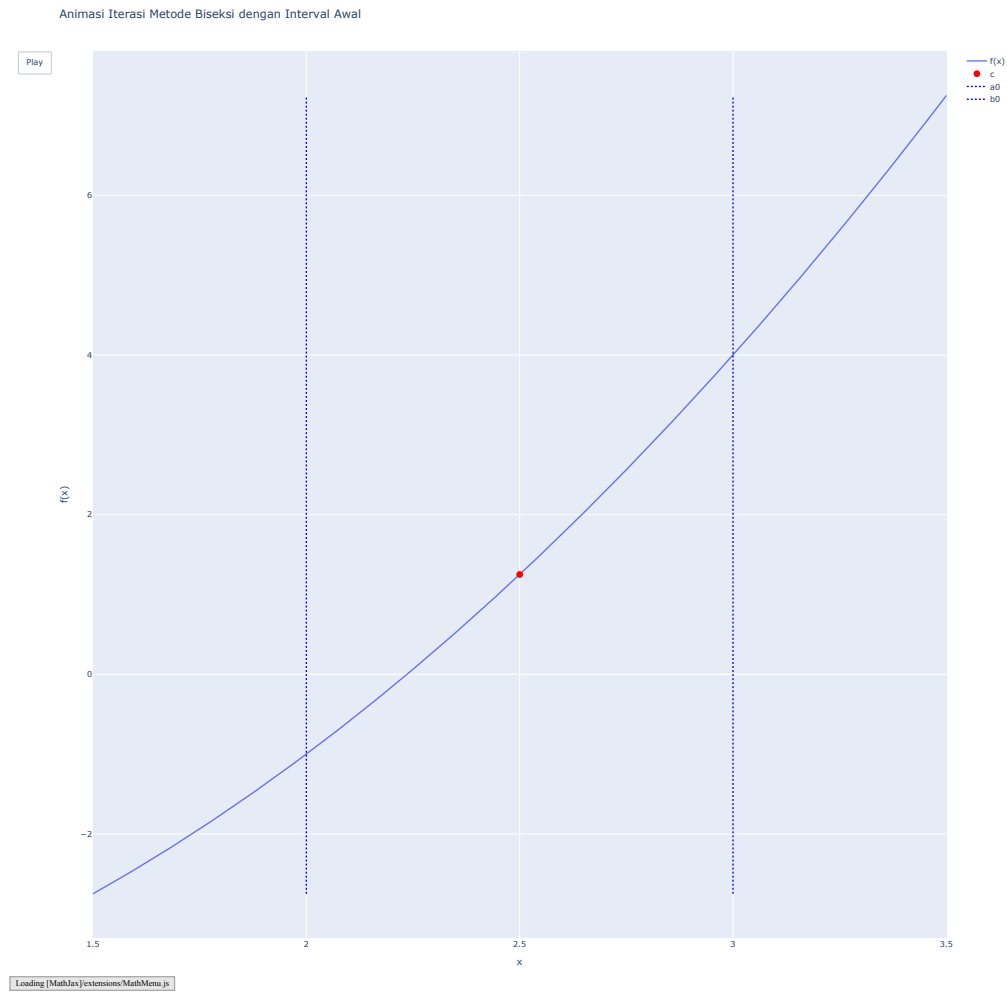
# Frame untuk animasi tiap iterasi
frames = []
for i, (iter_num, a, b, c, fc) in enumerate(iter_data):
    frames.append(go.Frame(
        data=[
            go.Scatter(x=x_vals, y=y_vals, mode="lines", name="f(x)"),
            go.Scatter(x=[c], y=[fc], mode="markers",
                marker=dict(color='red', size=10),
                name=f"c (iter {iter_num})"),
            go.Scatter(x=[a, a], y=[min_y, max_y], mode="lines",
                line=dict(dash="dash", color="orange"), showlegend=False),
            go.Scatter(x=[b, b], y=[min_y, max_y], mode="lines",
                line=dict(dash="dash", color="orange"), showlegend=False),
            go.Scatter(x=[a0, a0], y=[min_y, max_y], mode="lines",
                line=dict(dash="dot", color="blue"), name="a0"),
            go.Scatter(x=[b0, b0], y=[min_y, max_y], mode="lines",
                line=dict(dash="dot", color="blue"), name="b0"),
        ],
        name=f"Iterasi {iter_num}"
    ))

# Inisialisasi animasi
fig = go.Figure(
    data=[
        go.Scatter(x=x_vals, y=y_vals, mode="lines", name="f(x)"),
        go.Scatter(x=[iter_data[0][3]], y=[iter_data[0][4]], mode="markers",
            marker=dict(color='red', size=10), name="c"),
        go.Scatter(x=[a0, a0], y=[min_y, max_y], mode="lines",
            line=dict(dash="dot", color="blue"), name="a0"),
        go.Scatter(x=[b0, b0], y=[min_y, max_y], mode="lines",
            line=dict(dash="dot", color="blue"), name="b0"),
    ],
    layout=go.Layout(
        title="Animasi Iterasi Metode Biseksi dengan Interval Awal",

```

```
xaxis=dict(title="x"),
yaxis=dict(title="f(x)", zeroline=True),
updatemenus=[
    dict(
        type="buttons",
        showactive=False,
        buttons=[
            dict(label="Play", method="animate",
                args=[None, {"frame": {"duration": 1000, "redraw": True},
                    "fromcurrent": True}])
        ]
    )
],
frames=frames
)

fig.show()
```



Kesimpulan

Dengan **Metode Biseksi**, akar dari fungsi nonlinear sederhana seperti $f(x) = x^2 - 5$ dapat ditemukan secara numerik meski tidak menggunakan turunan. Metode ini sangat **andal dan stabil** digunakan dalam perhitungan geoteknik dan geofisika dalam dunia pertambangan.

Interpretasi Hasil

Solusi $x \approx 2.236$ bisa dimaknai sebagai:

Kedalaman 2.236 meter dari permukaan tanah di mana **tekanan air pori = 0** — transisi dari kondisi kapiler (tekanan negatif) ke jenuh (tekanan positif). Titik ini penting untuk:

- Analisis kestabilan lereng tambang terbuka
- Identifikasi muka air tanah
- Desain sistem drainase tambang

6.2.2 Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson digunakan untuk mencari akar dari fungsi nonlinear secara **iteratif**, dengan memanfaatkan **turunan pertama** dari fungsi tersebut.

Algoritma Metode Newton

1. Pilih tebakan awal x_0
2. Hitung turunan $f'(x)$ dari fungsi $f(x)$
3. Iterasikan rumus:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

4. Ulangi hingga selisih $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ (toleransi)

Contoh Terapan Metode Newton

Mari kita gunakan fungsi yang sama seperti sebelumnya:

$$f(x) = x^2 - 5$$

Turunannya adalah:

$$f'(x) = 2x$$

Pilih Awal x_0

Gunakan tebakan awal $x_0 = 2$ karena akar positif dari $x^2 = 5$ berada di sekitar 2.236.

Iterasi Newton-Raphson

Gunakan rumus iteratif:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n}$$

Tabel Iterasi

Table 6.2: Iterasi Metode Newton-Raphson dengan Detail Lengkap

Iterasi	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$ x_{n+1} - x_n $
0	2.000000	-1.000000	4.000000	2.250000	0.250000
1	2.250000	0.062500	4.500000	2.236111	0.013889
2	2.236111	0.000193	4.472222	2.236068	0.000043
3	2.236068	1.86e-09	4.472136	2.236068	≈ 0
4	2.236068	8.88e-16	4.472136	2.236068	≈ 0

Konvergensi

Setelah 3 iterasi, solusi konvergen ke:

$$x \approx 2.236068$$

Dengan error di bawah $\varepsilon = 0.001$

Visualisasi Metode Newton

Berikut ini dilampirkan Kode Python untuk memperlihatkan proses pencarian titik penyelesaiannya dengan menggunakan Metode Secant secara visual.

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

# Fungsi dan turunannya
def f(x):
    return x**2 - 5

def df(x):
    return 2 * x

# Fungsi iterasi Newton-Raphson
def newton_iterations(f, df, x0, tol=1e-6, max_iter=20):
    iterations = []
    x = x0
    for i in range(max_iter):
        fx = f(x)
        dfx = df(x)
        if dfx == 0:
            break
        x_new = x - fx / dfx
        iterations.append((i + 1, x, x_new, fx))
        if abs(x_new - x) < tol:
            break
        x = x_new
    return iterations

# Parameter awal
x0 = 3.0
iter_data = newton_iterations(f, df, x0)

# Sumbu x dan y untuk plot fungsi
x_vals = np.linspace(1.5, 3.5, 400)
y_vals = f(x_vals)

# Membuat frame animasi
frames = []
for i, (iter_num, x_old, x_new, fx) in enumerate(iter_data):
```

```

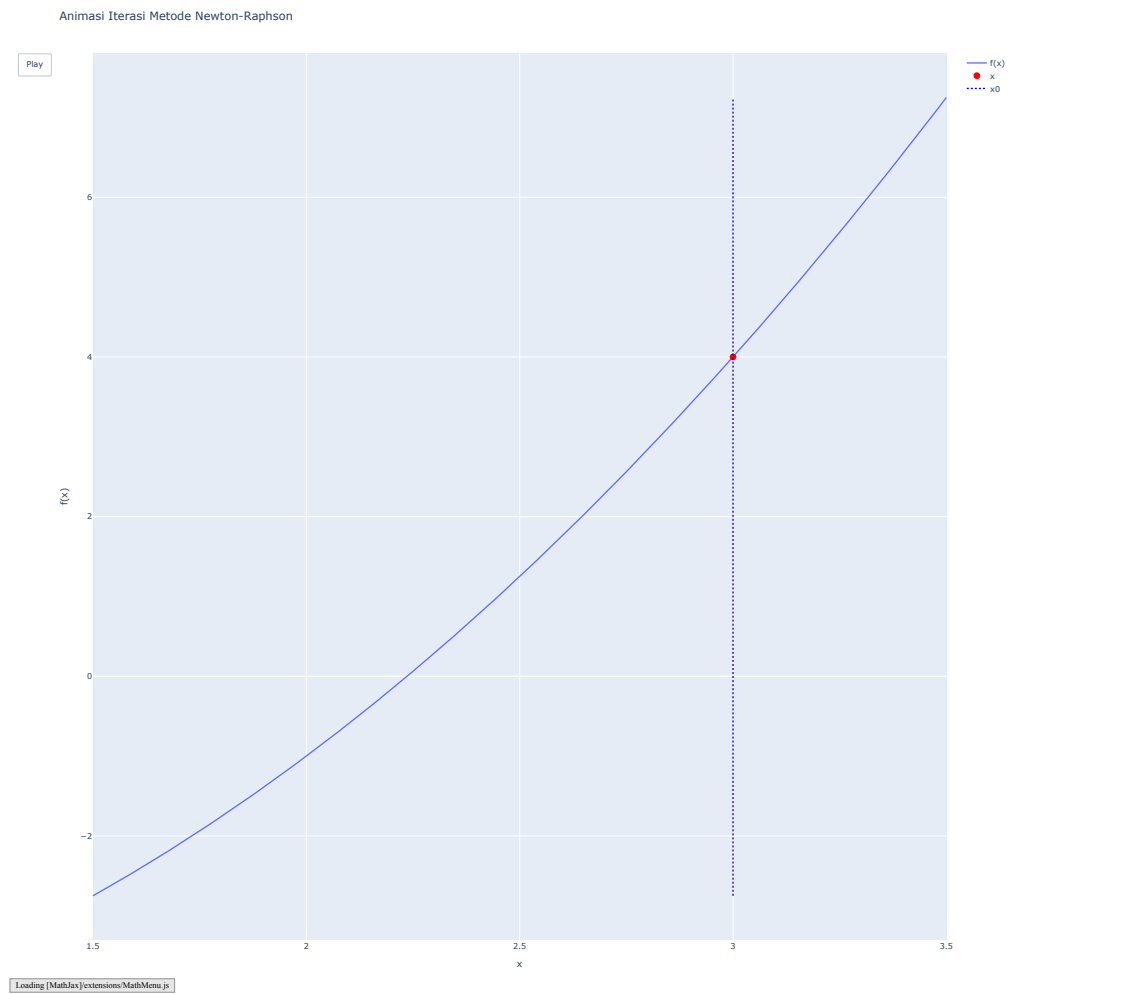
tangent_line_x = np.linspace(x_old - 0.5, x_old + 0.5, 50)
tangent_line_y = f(x_old) + df(x_old) * (tangent_line_x - x_old)

frames.append(go.Frame(
    data=[
        go.Scatter(x=x_vals, y=y_vals, mode="lines", name="f(x)"),
        go.Scatter(x=[x_old], y=[f(x_old)], mode="markers",
            marker=dict(color='red', size=10), name=f"x (iter {i+1})"),
        go.Scatter(x=tangent_line_x, y=tangent_line_y, mode="lines",
            line=dict(dash="dot", color="green"), name="Tangent Line"),
        go.Scatter(x=[x0, x0], y=[min(y_vals), max(y_vals)], mode="lines",
            line=dict(dash="dot", color="blue"), name="x0"),
    ],
    name=f"Iterasi {i+1}"
))

# Plot awal
fig = go.Figure(
    data=[
        go.Scatter(x=x_vals, y=y_vals, mode="lines", name="f(x)"),
        go.Scatter(x=[iter_data[0][1]], y=[f(iter_data[0][1])],
            mode="markers", marker=dict(color='red', size=10), name="x"),
        go.Scatter(x=[x0, x0], y=[min(y_vals), max(y_vals)], mode="lines",
            line=dict(dash="dot", color="blue"), name="x0"),
    ],
    layout=go.Layout(
        title="Animasi Iterasi Metode Newton-Raphson",
        xaxis=dict(title="x"),
        yaxis=dict(title="f(x)", zeroline=True),
        updatemenus=[dict(
            type="buttons",
            showactive=False,
            buttons=[dict(label="Play", method="animate", args=[None,
                {"frame": {"duration": 1000, "redraw": True},
                "fromcurrent": True
            }])]
        )]
    ),
    frames=frames
)

fig.show()

```



Kesimpulan

- Sangat cepat (*konvergen secara kuadratik*)
- Butuh fungsi **turunan** yang tidak nol di sekitar akar
- Cocok untuk **fungsi halus dan kontinu**, seperti dalam perhitungan tekanan air pori, fluks fluida, dan deformasi batuan tambang

6.2.3 Metode Secant

Metode Secant adalah **metode iteratif** yang digunakan untuk mencari akar dari fungsi nonlinear dengan menggunakan dua tebakan awal yang berbeda dan menggantikan turunan dengan perbedaan antara dua nilai fungsi.

Algoritma Metode Secant

1. Pilih dua tebakan awal, x_0 dan x_1
2. Iterasikan rumus secant:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

3. Ulangi hingga selisih $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ (toleransi)

Contoh Terapan Metode Secant

Mari kita gunakan fungsi yang sama seperti sebelumnya:

$$f(x) = x^2 - 5$$

Tebakan Awal x_0 dan x_1

Untuk mencari akar dari fungsi ini, pilih dua tebakan awal:

- $x_0 = 2$
- $x_1 = 3$

Iterasi Metode Secant

Rumus Secant untuk iterasi adalah:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Di mana $f(x_n) = x_n^2 - 5$ dan iterasi dimulai dengan $x_0 = 2$ dan $x_1 = 3$.

Tabel Iterasi

Table 6.3: Iterasi Metode Secant untuk $f(x) = x^2 - 5$

Iterasi	x_n	$f(x_n)$	x_{n+1}	$ x_{n+1} - x_n $
0	3.000000	4.000000	2.200000	0.800000
1	2.200000	-0.160000	2.230769	0.030769
2	2.230769	-0.023669	2.236111	0.005342
3	2.236111	0.000193	2.236068	0.000043
4	2.236068	$-2.2882e-07$	2.236068	≈ 0

Konvergensi

Setelah 3 iterasi, solusi konvergen ke:

$$x \approx 2.236068$$

Dengan error di bawah $\varepsilon = 0.001$

Visualisasi Metode Secant

Berikut ini dilampirkan Kode Python untuk memperlihatkan proses pencarian titik penyelesaiannya dengan menggunakan Metode Secant secara visual.

```
import numpy as np
import plotly.graph_objects as go

# Fungsi
def f(x):
    return x**2 - 5

# Fungsi iterasi Secant
def secant_iterations(f, x0, x1, tol=1e-6, max_iter=20):
    iterations = []
    for i in range(max_iter):
        if f(x1) - f(x0) == 0:
            break
        x2 = x1 - f(x1)*(x1 - x0)/(f(x1) - f(x0))
        iterations.append((i+1, x0, x1, x2))
        if abs(x2 - x1) < tol:
            break
        x0, x1 = x1, x2
    return iterations

# Nilai awal
x0 = 2.0
x1 = 3.0
iter_data = secant_iterations(f, x0, x1)

# Fungsi untuk plot
x_vals = np.linspace(1.5, 3.5, 400)
y_vals = f(x_vals)

# Frame animasi
frames = []
for i, (n, x_prev, x_curr, x_next) in enumerate(iter_data):
    secant_x = np.linspace(x_prev, x_curr, 50)
    secant_slope = (f(x_curr) - f(x_prev)) / (x_curr - x_prev)
    secant_y = f(x_curr) + secant_slope * (secant_x - x_curr)

    frames.append(go.Frame(
        data=[go.Scatter(x=x_vals, y=y_vals, mode="lines", name="f(x)"),
              go.Scatter(x=[x_prev, x_curr], y=[f(x_prev), f(x_curr)],
                          mode="markers", marker=dict(size=8, color="red"), name="x_n, x_{n-1}"),
              go.Scatter(x=secant_x, y=secant_y, mode="lines", line=dict(dash="dot",
                              color="green"), name="Secant Line"),
              go.Scatter(x=[x0, x1], y=[min(y_vals), max(y_vals)], mode="lines",
                          line=dict(dash="dot", color="blue"), name="Initial Interval")
        ],
```

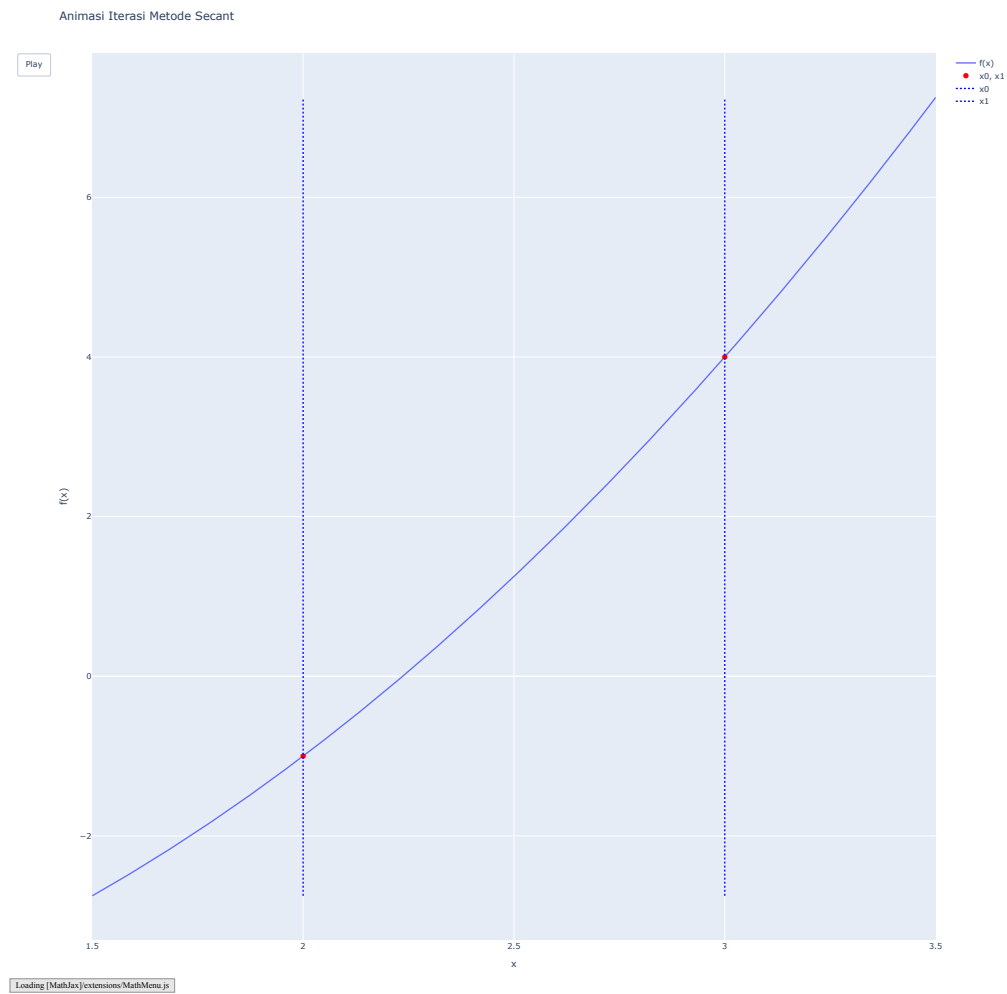
```

        name=f"Iterasi {n}"
    ))

# Visual awal
fig = go.Figure(
    data=[
        go.Scatter(x=x_vals, y=y_vals, mode="lines", name="f(x)"),
        go.Scatter(x=[x0, x1], y=[f(x0), f(x1)], mode="markers",
            marker=dict(size=8, color="red"), name="x0, x1"),
        go.Scatter(x=[x0, x0], y=[min(y_vals), max(y_vals)], mode="lines",
            line=dict(dash="dot", color="blue"), name="x0"),
        go.Scatter(x=[x1, x1], y=[min(y_vals), max(y_vals)], mode="lines",
            line=dict(dash="dot", color="blue"), name="x1"),
    ],
    layout=go.Layout(
        title="Animasi Iterasi Metode Secant",
        xaxis=dict(title="x"),
        yaxis=dict(title="f(x)", zeroline=True),
        updatemenus=[dict(
            type="buttons",
            showactive=False,
            buttons=[dict(label="Play", method="animate", args=[None, {
                "frame": {"duration": 1000, "redraw": True},
                "fromcurrent": True
            }])]
        )]
    ),
    frames=frames
)

fig.show()

```



Kesimpulan Metode Secant

- **Tidak memerlukan turunan** dari fungsi.
- Lebih sederhana daripada Metode Newton-Raphson.
- Cocok untuk fungsi yang tidak memiliki turunan eksplisit atau ketika turunan sulit dihitung.
- Bisa lebih **lambat daripada Newton-Raphson**, namun tetap efektif jika tebakan awal cukup baik.

6.3 Contoh Studi Kasus

Sebuah perusahaan ingin memaksimalkan **efisiensi produksi** berdasarkan jumlah pekerja (x) dan jam kerja per hari (y). Fungsi efisiensi ditentukan oleh:

$$\text{Efisiensi} = \frac{x \cdot y}{x + y + 1}$$

Namun, setiap kombinasi pekerja dan jam kerja juga menghasilkan biaya operasional yang dihitung dengan fungsi:

$$\text{Biaya} = x^2 + y^2$$

Perusahaan melakukan iterasi untuk mencari kombinasi terbaik x dan y yang menghasilkan **efisiensi maksimum** dengan **biaya yang tetap terkendali**. Titik-titik iterasi diamati sebagai berikut:

Iterasi	Jumlah Pekerja (x)	Jam Kerja (y)	Efisiensi	Biaya
1	2	2	0.89	8
2	5	4	1.82	41
3	8	6	2.37	100
4	11	7	2.68	170
5	14	9	2.95	277
6	17	10	3.12	389
7	20	12	3.33	528
8	23	13	3.48	618
9	25	14	3.57	725
10	28	15	3.65	829
11	30	16	3.72	976
12	33	18	3.78	1,149
13	35	19	3.83	1,361
14	38	20	3.88	1,528
15	40	22	3.91	1,664
16	42	23	3.94	1,788
17	45	24	3.97	2,041
18	48	26	4.00	2,300
19	50	27	4.02	2,529
20	53	28	4.04	2,809

6.3.1 Pertanyaan

1. Tentukan kombinasi pekerja dan jam kerja yang memberikan efisiensi maksimum.
2. Berapa biaya yang harus dikeluarkan pada titik efisiensi maksimum tersebut?
3. Jelaskan trade-off antara efisiensi dan biaya berdasarkan animasi iterasi.
4. Jika perusahaan ingin menjaga biaya di bawah 200, berapa efisiensi maksimal yang bisa dicapai?

6.3.2 Pembahasan

Efisiensi Maksimum

Dari tabel dan animasi, **efisiensi tertinggi** terjadi pada iterasi ke-15: - $x = 40$, $y = 22$, **Efisiensi = 3.91** (*Iterasi 15*)

Biaya pada Efisiensi Maksimum

Untuk menghitung biaya pada titik efisiensi maksimum:

$$\text{Biaya} = 40^2 + 22^2 = 1600 + 484 = 2084$$

Trade-off Efisiensi vs Biaya

- Semakin besar x dan y , efisiensi meningkat secara **melambat**, tetapi **biaya meningkat tajam**.
- Terlihat bahwa dari iterasi 13 ke 15, kenaikan efisiensi dari **3.83 ke 3.91** hanya sekitar **0.08**, sedangkan biaya naik **303 poin**.
- Artinya: ada **diminishing return** — efisiensi naik sedikit, tetapi biaya naik tajam.

Batas Biaya < 200

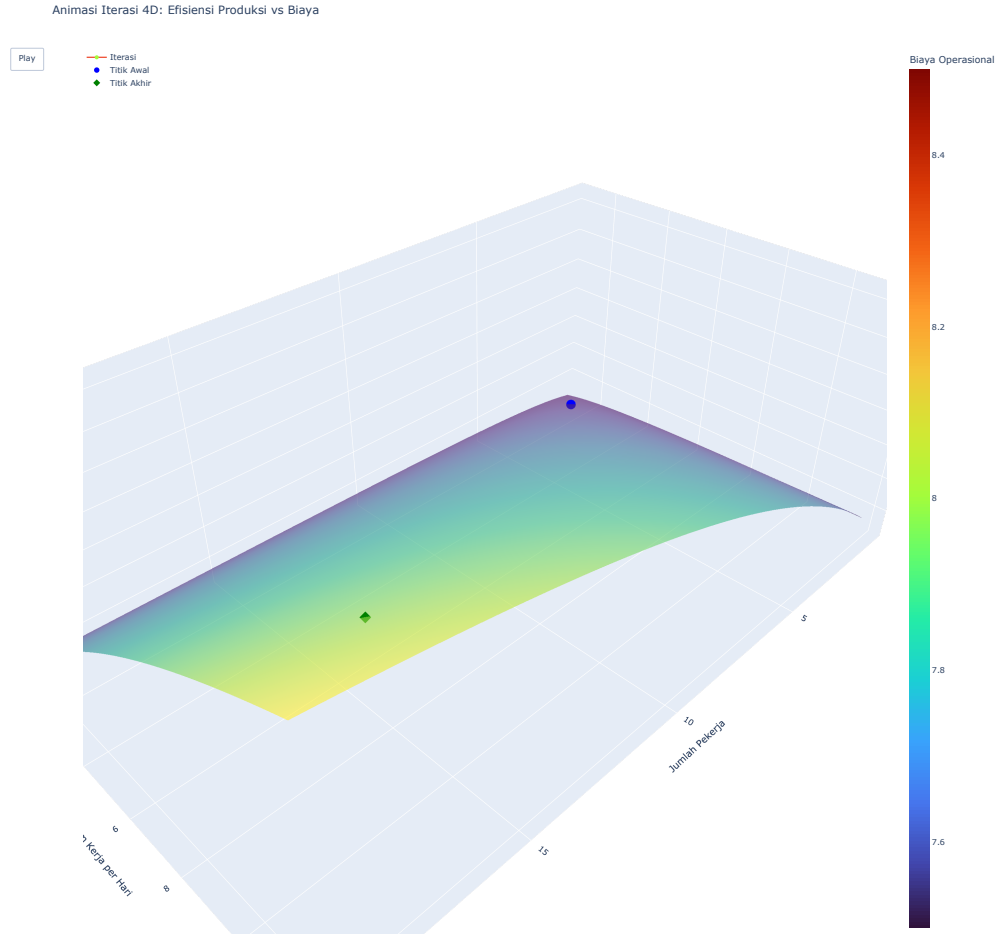
Dari tabel, hanya iterasi ke-1 hingga ke-4 yang memenuhi syarat:

- **Efisiensi maksimum** di bawah batas biaya ini adalah pada iterasi ke-4, dengan:
 - Efisiensi = **2.68**
 - Biaya = **170**

6.3.3 Kesimpulan

- **Kombinasi terbaik secara efisiensi:** ($x = 40, y = 22$), pada **iterasi ke-15**.
- Tetapi, untuk **batas biaya tertentu**, pilihan optimal bisa berbeda.
- **Visualisasi 4D** membantu memahami interaksi antar variabel dan dampaknya secara intuitif.

6.3.4 Visualisasi



6.4 Studi Kasus Tambang

6.4.1 Tekanan Air Pori

Dalam desain kestabilan lereng tambang terbuka, tekanan air pori (u) sangat memengaruhi faktor keamanan. Salah satu model umum:

$$u(h) = \gamma_w h - \alpha e^{-kh}$$

dengan:

- h : kedalaman dari permukaan
- γ_w : berat jenis air (misalnya 9.81 kN/m^3)
- α, k : parameter karakteristik batuan (misal $\alpha = 30, k = 0.8$)

Tujuan

Menentukan kedalaman h saat tekanan air pori $u(h) = 0$ (titik transisi jenuh-tidak jenuh).

Instruksi

1. Definisikan fungsi nonlinear:

$$f(h) = \gamma_w h - \alpha e^{-kh}$$

2. Tentukan $f(h) = 0 \rightarrow$ akar dari fungsi
3. Gunakan metode numerik:
 - **Newton-Raphson:** $h_{n+1} = h_n - \frac{f(h_n)}{f'(h_n)}$
 - Atau **Metode Secant** jika turunan sulit
4. Gunakan nilai awal $h_0 = 2$, toleransi $\varepsilon = 0.001$
5. Iterasi hingga $|f(h_n)| < \varepsilon$

6.4.2 Distribusi Tekanan Udara

Ventilasi tambang bawah tanah sering kali dianalisis menggunakan:

$$P(x) = P_0 e^{-kx}$$

Jika ditambahkan persamaan rugi tekanan, misalnya:

$$P(x) = \frac{P_0}{1 + ae^{kx}}$$

maka bentuknya menjadi **nonlinear** dan tidak bisa diselesaikan secara langsung.

Tujuan

Menentukan posisi x saat tekanan turun di bawah ambang, misal $P(x) = 20$ kPa.

Instruksi

1. Definisikan fungsi:

$$f(x) = \frac{P_0}{1 + ae^{kx}} - 20$$

2. Cari nilai x sehingga $f(x) = 0$
3. Gunakan metode numerik (Newton-Raphson atau Secant)
4. Asumsikan $P_0 = 100$, $a = 3$, $k = 0.4$, coba nilai awal $x_0 = 3$

6.4.3 Penentuan Regangan Batuan

Model empiris batuan sering kali mengikuti hubungan nonlinear:

$$\sigma = E \cdot \epsilon + \beta \epsilon^2$$

Misalnya:

- $E = 4000$ MPa (Modulus Young)
- $\beta = 50000$
- Tegangan lapangan: $\sigma = 25$ MPa

Tujuan

Hitung nilai regangan ϵ .

Instruksi

1. Nyatakan ulang fungsi:

$$f(\epsilon) = E \cdot \epsilon + \beta \epsilon^2 - \sigma$$

2. Substitusi nilai:

$$f(\epsilon) = 4000 \cdot \epsilon + 50000 \cdot \epsilon^2 - 25$$

3. Gunakan metode numerik untuk mencari ϵ :

- **Metode Newton-Raphson:**

$$f'(\epsilon) = 4000 + 2 \cdot 50000 \cdot \epsilon$$

- Mulai dengan $\epsilon_0 = 0.005$

4. Iterasi hingga $|f(\epsilon_n)| < 0.0001$

6.4.4 Kesimpulan Studi Kasus

Ketiga kasus di atas menunjukkan bahwa **Metode Numerik adalah alat penting** dalam praktik teknik tambang:

- Membantu menyelesaikan **persamaan nonlinear** yang tidak bisa dipecahkan secara aljabar
- Digunakan dalam **analisis tekanan air pori, sistem ventilasi, dan pengujian laboratorium batuan**
- Memberikan solusi cepat dan akurat untuk **pengambilan keputusan teknis lapangan**

Dengan menguasai metode numerik, insinyur tambang dapat menjawab pertanyaan “berapa kedalaman jenuh?”, “di mana tekanan kritis terjadi?”, dan “berapa regangan batuan?” dengan presisi tinggi.

6.5 Latihan Soal

1. Gunakan metode Newton-Raphson untuk:

$$f(x) = x^3 - 4x + 1, \quad x_0 = 1$$

2. Metode Secant untuk:

$$f(x) = \cos(x) - x, \quad x_0 = 0.5, \quad x_1 = 1$$

3. Metode Biseksi (Regula Falsi) pada:

$$f(x) = e^{-x} - x, \quad [a, b] = [0, 1]$$

6.6 Penutup

Metode numerik merupakan alat penting dalam menyelesaikan persoalan teknik yang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Dalam konteks rekayasa pertambangan, metode seperti Biseksi, Newton-Raphson, dan Secant memungkinkan insinyur untuk memecahkan persamaan nonlinear yang muncul dalam analisis kestabilan lereng, perhitungan tekanan air pori, desain sistem drainase, dan berbagai aplikasi lainnya. Dengan memahami dan menerapkan metode numerik, insinyur tambang dapat mengambil keputusan teknis secara lebih presisi, efisien, dan berbasis data.

Chapter 7

Pers. Non-Diferensial

Persamaan Non-Diferensial (PND) adalah persamaan matematika yang **tidak melibatkan turunan (derivatif)** dari variabel. Fokusnya adalah pada hubungan langsung antara variabel melalui operasi aljabar biasa.

Dalam teknik tambang, **PND digunakan untuk menghitung:**

- Volume galian atau timbunan,
- Perencanaan logistik dan biaya,
- Estimasi statis cadangan,
- Perhitungan rasio kupasan,
- Pemodelan sistem linier.

7.1 Persamaan Aljabar

Persamaan aljabar terdiri dari variabel, konstanta, dan operasi dasar (tambah, kurang, kali, bagi). Bentuk umum:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

Jenis:

- $n = 1$: Linear
- $n = 2$: Kuadrat
- $n \geq 3$: Polinomial orde tinggi

Contoh Kasus: Margin Penjualan Alat Tambang

Sebuah alat bor dibeli seharga Rp 150 juta dan dijual Rp 210 juta. Hitung margin keuntungan.

Penyelesaian:

$$\text{Keuntungan} = \text{Harga Jual} - \text{Harga Beli} = 210 - 150 = 60 \text{ juta}$$

Interpretasi: Keuntungan adalah **Rp 60 juta**.

7.2 Persamaan Matriks

Digunakan untuk sistem linier skala besar, terutama dalam simulasi tambang atau alokasi sumber daya:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Contoh Kasus: Jam Kerja Ekskavator dan Dump Truck

Ekskavator butuh 2 jam loading dan 1 jam idle; dump truck butuh 1 jam loading dan 3 jam idle. Total jam loading: 8, idle: 9.

Model Matriks:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Solusi:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Interpretasi: 3 ekskavator dan 2 dump truck.

7.3 Sistem Persamaan Linear

Sistem Persamaan Linear (SPL) yang memiliki lebih dari dua variabel. Metode Invers digunakan untuk menyelesaikan masalah alokasi sumber daya dalam operasi pertambangan. Dalam bentuk matriks 3×3 , SPL dapat dinyatakan sebagai:

$$AX = B$$

dengan:

- A adalah matriks koefisien,
- X adalah vektor variabel,
- B adalah vektor hasil.

Contoh Kasus: Alokasi BBM Tiga Jenis Alat Berat

Dalam suatu proyek tambang, digunakan tiga jenis alat berat: Bulldozer (x), Excavator (y), dan Dump Truck (z). Kebutuhan BBM per hari masing-masing alat adalah:

- Bulldozer: 10 liter/unit
- Excavator: 8 liter/unit
- Dump Truck: 5 liter/unit

Total BBM yang tersedia: 300 liter.

Diketahui pula: - Jumlah Excavator = Dump Truck

- Jumlah Bulldozer = $2 \times$ Dump Truck

Model Matematika (SPL):

$$\begin{cases} 10x + 8y + 5z = 300 \\ y - z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

Matriks Koefisien:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Metode Invers Matriks

$$X = A^{-1}B$$

1. Hitung invers dari A , yaitu A^{-1}
2. Kalikan dengan B untuk mendapatkan X

Misalnya hasilnya:

$$X = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Interpretasi Hasil

- 20 unit Bulldozer
- 10 unit Excavator
- 10 unit Dump Truck

Sistem ini menjamin efisiensi BBM sesuai batas dan proporsi operasional.

Metode invers matriks sangat efisien untuk menyelesaikan SPL ≥ 2 variabel dalam perencanaan tambang.

7.4 Persamaan Eksponensial

Digunakan untuk model pertumbuhan cadangan, penurunan kadar, atau depresiasi alat:

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$$

Contoh Kasus: Pertumbuhan Nilai Investasi Tambang

Nilai investasi tumbuh 16 kali lipat dengan laju eksponensial $2^x = 16$. Berapa waktu yang dibutuhkan?

Penyelesaian:

$$2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$$

Interpretasi: Waktu yang dibutuhkan adalah **4 periode**.

7.5 Persamaan Logaritma

Digunakan untuk skala data tambang (misalnya: log-plot), data seismik atau korelasi kedalaman.

$$\log_b(x) = y \Rightarrow x = b^y$$

Contoh Kasus: Skala Log Konsentrasi Unsur

Jika $\log_{10}(x) = 3$, tentukan nilai x .

Penyelesaian:

$$x = 10^3 = 1000$$

Interpretasi: Konsentrasi unsur adalah **1000 ppm**.

7.6 Persamaan Trigonometri

Digunakan dalam analisis kemiringan lereng, orientasi lapisan batuan, arah pengeboran.

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

Contoh Kasus: Kemiringan Lereng Tambang

Tentukan semua nilai θ dalam radian di mana $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$

Penyelesaian:

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{atau} \quad \theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Interpretasi: Sudut lereng bisa mengacu pada arah θ yang berulang setiap 2π .

7.7 Persamaan Parametrik

Digunakan untuk lintasan alat berat, rute hauling, atau simulasi pergerakan material:

Contoh Kasus: Lintasan Truk Tambang

Sebuah truk bergerak dengan posisi:

$$x(t) = 5t + 10, \quad y(t) = 2t^2$$

Tentukan posisi pada $t = 3$ detik.

Penyelesaian:

$$x(3) = 5(3) + 10 = 25, \quad y(3) = 2(3)^2 = 18$$

Interpretasi: Posisi truk pada $t = 3$ adalah $(25, 18)$.

7.8 Ringkasan PND

Jenis Persamaan	Bentuk Umum	Aplikasi Teknik Tambang
Aljabar	$ax + b = 0$	Estimasi biaya, logistik, dan margin operasional
Sistem Persamaan Linear	$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	Alokasi sumber daya, keseimbangan supply-demand
Matriks	$AX = B$	Model input-output, simulasi operasi terintegrasi
Eksponensial	$a^x = b$	Pertumbuhan biaya, depresiasi alat, penurunan kadar
Logaritma	$\log_b(x) = y$	Skala data geologi/geokimia, transformasi data seismik
Trigonometri	$\sin(x), \cos(x)$	Analisis kemiringan lereng, orientasi struktur geologi
Parametrik	$x(t), y(t)$	Pemodelan lintasan alat berat, tracking posisi real-time

7.9 Studi Kasus PND

7.9.1 Soal 1

Optimasi Penggunaan Alat Berat dan Bahan Bakar

Latar Belakang:

Sebuah proyek konstruksi menggunakan dua jenis alat berat: Excavator dan Bulldozer. Excavator mengonsumsi 15 liter solar per jam, Bulldozer 20 liter per jam. Excavator beroperasi 8 jam/hari, Bulldozer 6 jam/hari. Biaya per liter solar adalah Rp 10.000. Proyek memiliki anggaran bahan bakar Rp 2.400.000 per hari.

Pertanyaan:

1. Berapa maksimal jumlah Excavator (x) dan Bulldozer (y) yang dapat dioperasikan tanpa melebihi anggaran bahan bakar?
2. Jika Excavator harus selalu berjumlah minimal setengah dari Bulldozer, buat model matematika pembatasnya.

7.9.2 Soal 2

Penentuan Harga dan Kuantitas Produk Tambang untuk Maksimalkan Keuntungan

Latar Belakang:

Perusahaan tambang memproduksi produk yang dijual dengan harga P (Rp/ton) dan jumlah penjualan x ton. Fungsi permintaan:

$$P = 2000 - 0.5x$$

Biaya produksi:

$$C = 500x + 200,000$$

Keuntungan:

$$L = Px - C$$

Pertanyaan:

1. Tuliskan fungsi keuntungan dalam variabel x .
2. Berapa banyak produksi (x) yang menghasilkan keuntungan maksimal? (gunakan turunan dan carilah titik maksimum)
3. Berapa harga jualnya pada produksi optimal?

7.9.3 Soal 3

Prediksi Depresiasi Nilai Mesin dengan Penyesuaian Tahunan

Latar Belakang:

Sebuah mesin dibeli seharga Rp 3 miliar dan menyusut nilainya sebesar 10% dari nilai tahun sebelumnya setiap tahun. Selain itu, biaya perawatan tahunan tetap Rp 50 juta.

Pertanyaan:

1. Buat persamaan nilai mesin V_t setelah t tahun.
2. Buat persamaan total biaya (depresiasi + perawatan) hingga tahun ke- t .
3. Hitung nilai mesin dan total biaya setelah 5 tahun.

7.9.4 Soal 4

Perencanaan Jadwal Pengiriman dan Kapasitas Truk

Latar Belakang:

Sebuah perusahaan pengiriman memiliki truk dengan kapasitas 8 ton dan kecepatan rata-rata 40 km/jam. Jarak tempuh rute adalah 160 km satu arah. Truk dapat melakukan pengiriman selama 10 jam per hari. Setiap kali pengiriman memerlukan waktu bongkar muat selama 30 menit.

Pertanyaan:

1. Berapa banyak pengiriman bolak-balik yang dapat dilakukan truk dalam sehari?
2. Jika setiap pengiriman membawa 6 ton, berapa total barang yang dapat diangkut dalam sehari?
3. Buat persamaan total waktu yang diperlukan untuk n pengiriman.

7.9.5 Soal 5

Model Perencanaan Persediaan Material dengan Fungsi Permintaan dan Pengiriman

Latar Belakang:

Permintaan material proyek diperkirakan mengikuti fungsi:

$$D(t) = 500 + 20t$$

dengan t dalam hari, $D(t)$ adalah jumlah material yang dibutuhkan pada hari ke- t . Pengiriman material dilakukan sekali sehari dengan jumlah tetap S ton.

Pertanyaan:

1. Tuliskan persamaan stok material $I(t)$ pada hari t dengan asumsi stok awal $I(0) = 1000$ ton.
2. Tentukan nilai S agar stok tidak pernah habis dalam 10 hari.
3. Jika stok awal berubah menjadi 500 ton, bagaimana pengaruhnya terhadap kebutuhan S ?

Chapter 8

Pers. Diferensial Biasa

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) merupakan salah satu cabang penting dalam **matematika terapan** yang mempelajari hubungan antara suatu fungsi dengan **turunannya** (Kreyszig, 2011). Secara umum, bentuk persamaan diferensial biasa dapat ditulis sebagai:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

di mana:

- x adalah variabel bebas,
- $y = y(x)$ adalah fungsi tak diketahui,
- $y', y'', \dots, y^{(n)}$ adalah turunan pertama, kedua, hingga ke- n dari y terhadap x .

Persamaan diferensial biasa merupakan dasar penting dalam matematika terapan dan ilmu rekayasa (Boyce & DiPrima, 2017).

Dalam konteks dunia teknik, khususnya **teknik pertambangan**, PDB digunakan untuk **memodelkan fenomena-fenomena fisik** yang kompleks dan dinamis, antara lain:

- **Aliran air tanah** di sekitar atau dalam tubuh tambang,
- **Ventilasi udara** dalam tambang bawah tanah,
- **Pelapukan batuan** akibat perubahan suhu dan kelembaban,
- **Penyebaran suhu** di dalam tanah atau batuan akibat aktivitas tambang.

Pemahaman terhadap PDB memungkinkan para insinyur pertambangan untuk:

- Membuat **model prediktif** yang membantu dalam pengambilan keputusan teknis,
- Melakukan **simulasi dan evaluasi sistem tambang** berdasarkan perubahan kondisi waktu-ke-waktu,
- Merancang **peralatan dan prosedur kerja** yang lebih efisien dan aman berdasarkan kondisi fisis tambang yang berubah secara dinamis.

Dengan demikian, penerapan PDB tidak hanya bersifat teoretis, tetapi juga sangat praktis dan berdampak langsung terhadap **efisiensi operasional** dan **keselamatan kerja** di industri pertambangan.

8.1 PDB Orde Satu

Salah satu contoh paling sederhana dari PDB Orde Satu adalah:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

Apa artinya?

Persamaan ini menyatakan bahwa **laju perubahan suatu besaran y terhadap waktu atau jarak (x) sebanding dengan nilai y itu sendiri**. Artinya, semakin besar y , semakin cepat ia berubah (Zill, 2018).

- Jika $k > 0$: maka nilai y akan **bertambah dengan cepat** — ini disebut **pertumbuhan eksponensial**.
- Jika $k < 0$: maka nilai y akan **menurun dengan cepat** — ini disebut **peluruhan eksponensial**.

8.1.1 Peluruhan Gas Beracun

Di tambang bawah tanah, gas berbahaya seperti karbon monoksida (CO) atau metana (CH₄) dapat terakumulasi. Untuk mencegah bahaya ledakan atau keracunan, sistem ventilasi harus mampu mengurangi konsentrasi gas ini seiring waktu (Kreyszig, 2011).

Secara matematis, peluruhan konsentrasi gas tersebut dapat dimodelkan dengan **persamaan diferensial eksponensial sederhana** berikut:

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

Keterangan

- $C = C(t)$ adalah **konsentrasi gas** pada waktu t (misalnya dalam ppm),
- t adalah waktu (misalnya dalam menit),
- k adalah **konstanta peluruhan** (negatif), yang mencerminkan efisiensi ventilasi; makin besar k , makin cepat gas berkurang.

Penyelesaian Matematis

Langkah 1: Pisahkan variabel

$$\frac{1}{C} dC = -k dt$$

Langkah 2: Integrasi kedua sisi

$$\int \frac{1}{C} dC = \int -k dt$$

$$\ln |C| = -kt + C_1$$

Langkah 3: Pangkatkan kedua sisi

$$C = e^{-kt+C_1} = Ce^{C_1} \cdot e^{-kt}$$

Misalkan $C_0 = e^{C_1}$ adalah **konsentrasi awal** saat $t = 0$, maka:

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

Interpretasi Solusi

- Ketika $t = 0$, maka $C(0) = C_0$ (sesuai kondisi awal).
- Ketika $t \rightarrow \infty$, maka $C(t) \rightarrow 0$, artinya konsentrasi gas **mendekati nol** seiring waktu.
- Nilai k menentukan **seberapa cepat** konsentrasi menurun. Jika k besar (misalnya karena ventilasi sangat efisien), gas akan cepat hilang.

Contoh Numerik

Misalkan:

- Konsentrasi awal gas: $C_0 = 200$ ppm,
- Efisiensi ventilasi: $k = 0,1$ per menit,

Maka konsentrasi gas setelah t menit adalah:

$$C(t) = 200e^{-0,1t}$$

Contoh nilai:

- Setelah 10 menit:

$$C(10) = 200e^{-1} \approx 200 \cdot 0,3679 \approx 73,6 \text{ ppm}$$

- Setelah 30 menit:

$$C(30) = 200e^{-3} \approx 200 \cdot 0,0498 \approx 9,96 \text{ ppm}$$

8.1.2 Pertumbuhan Retakan

Dalam tambang bawah tanah, tekanan air tanah yang tinggi dapat menyebabkan pembukaan dan perluasan retakan pada dinding tambang. Untuk menjaga keamanan dan kestabilan tambang, penting bagi insinyur untuk memprediksi **seberapa cepat retakan ini bertambah panjang** (Kreyszig, 2011; Zill, 2018).

Model sederhana untuk pertumbuhan panjang retakan adalah:

$$\frac{dl}{dt} = kl$$

Keterangan

- $l = l(t)$ adalah **panjang retakan** pada waktu t (misalnya dalam cm),
- t adalah waktu (misalnya dalam hari atau jam),
- k adalah **konstanta pertumbuhan** yang menunjukkan seberapa cepat retakan berkembang, tergantung pada tekanan air tanah dan sifat material dinding tangkai.

Penyelesaian Matematis

Persamaan diferensial orde satu:

$$\frac{dl}{dt} = kl$$

dapat diselesaikan dengan metode **pemisahan variabel**:

Langkah 1: Pisahkan variabel

$$\frac{1}{l} dl = k dt$$

Langkah 2: Integrasi kedua sisi

$$\int \frac{1}{l} dl = \int k dt$$

$$\ln |l| = kt + C_1$$

Langkah 3: Pangkatkan kedua sisi

$$l = e^{kt+C_1} = C_0 e^{kt}$$

di mana $C_0 = e^{C_1}$ adalah **panjang retakan awal** saat $t = 0$.

Interpretasi Solusi

- Pada waktu awal ($t = 0$), panjang retakan adalah $l(0) = C_0$.
- Seiring waktu, panjang retakan bertambah **secara eksponensial**, artinya semakin lama retakan semakin cepat berkembang.
- Nilai k menentukan laju pertumbuhan. Jika k kecil, pertumbuhan lambat; jika besar, retakan berkembang cepat dan perlu perhatian segera.

Contoh Numerik

Misalkan:

- Panjang awal retakan: $l_0 = 1$ cm,
- Konstanta pertumbuhan: $k = 0,05$ per hari,

Maka panjang retakan setelah t hari adalah:

$$l(t) = 1 \cdot e^{0,05t} = e^{0,05t}$$

Contoh nilai:

- Setelah 10 hari:

$$l(10) = e^{0,5} \approx 1,65 \text{ cm}$$

- Setelah 30 hari:

$$l(30) = e^{1,5} \approx 4,48 \text{ cm}$$

8.1.3 Manfaat Model

Model ini membantu insinyur Insinyur Tambang untuk:

- Memperkirakan **seberapa cepat retakan bertambah panjang** dan kapan diperlukan tindakan penguatan,
- Merencanakan **pemeliharaan dan pengawasan tambang** agar lebih aman,
- Mengoptimalkan **sistem pengendalian tekanan air tanah** agar laju pertumbuhan retakan dapat dikendalikan.

8.2 Pers. Diferensial Orde Tinggi

8.2.1 Pers. Diferensial Homogen

Persamaan diferensial dikatakan **homogen** jika semua suku dalam persamaan hanya melibatkan fungsi yang dicari dan turunannya, tanpa adanya suku bebas (konstanta atau fungsi lain) (Zill, 2018).

Bentuk Umum

Persamaan diferensial linear homogen orde satu biasanya ditulis sebagai:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

di mana:

- $y = y(x)$ adalah fungsi tak diketahui,
- $P(x)$ adalah fungsi yang diketahui (tergantung pada variabel x) (Boyce & DiPrima, 2017).

Contoh Spesifik

Misalkan diberikan persamaan:

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

Di sini, $P(x) = -3$ (konstanta) (Zill, 2018).

Penyelesaian Persamaan Homogen

Persamaan

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

dapat diselesaikan dengan metode **pemisahan variabel** sebagai berikut:

Langkah 1: Pisahkan variabel y dan x :

$$\frac{dy}{y} = -P(x) dx$$

Langkah 2: Integrasikan kedua ruas:

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int P(x) dx$$

$$\ln |y| = - \int P(x) dx + C$$

di mana C adalah konstanta integrasi (Boyce & DiPrima, 2017).

Langkah 3: Eksponensialkan kedua ruas untuk mendapatkan solusi eksplisit:

$$y = Ce^{-\int P(x) dx}$$

Penyelesaian pada Persamaan Spesifik

Untuk persamaan:

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

kita punya:

$$P(x) = -3$$

Maka,

$$y = Ce^{-\int(-3)dx} = Ce^{3x}$$

Dengan demikian, solusi umum adalah:

$$y(x) = Ce^{3x}$$

Ini sesuai dengan metode dan contoh yang dijelaskan di referensi pembelajaran (Academy, 2024).

Interpretasi Solusi

- Solusi berupa fungsi eksponensial dengan laju pertumbuhan atau peluruhan tergantung tanda dan nilai dari $P(x)$.
- Jika $P(x)$ positif, solusi akan meluruh; jika negatif, solusi akan tumbuh (Zill, 2018).

8.2.2 Pers. Diferensial Tak Homogen

Persamaan diferensial dikatakan **tak homogen** jika terdapat suku bebas (konstanta atau fungsi non-homogen lainnya) di dalam persamaan (Zill, 2018).

Bentuk Umum

Persamaan diferensial linear tak homogen orde satu memiliki bentuk umum:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

- $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi dari x ,
- $Q(x) \neq 0$ merupakan bagian non-homogen dari persamaan (Boyce & DiPrima, 2017).

Contoh Spesifik

$$\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$$

Pada contoh ini:

- $P(x) = -3$
- $Q(x) = e^{2x}$

Penyelesaian

Solusi umum dari persamaan diferensial tak homogen terdiri dari dua bagian:

1. **Solusi homogen** (y_h): diselesaikan dari persamaan

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

2. **Solusi khusus** (y_p): diselesaikan menggunakan metode **faktor integrasi** atau **variasi parameter** (Academy, 2024).

Penyelesaian dengan Faktor Integrasi

Hitung faktor integrasi:

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

Untuk contoh:

$$\mu(x) = e^{\int -3 dx} = e^{-3x}$$

Kalikan seluruh persamaan dengan $\mu(x)$:

$$e^{-3x} \frac{dy}{dx} - 3e^{-3x} y = e^{-3x} e^{2x}$$

Ruas kiri menjadi turunan hasil kali:

$$\frac{d}{dx} [e^{-3x} y] = e^{-x}$$

Integrasikan kedua sisi:

$$e^{-3x} y = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

Selesaikan untuk y :

$$y = e^{3x} (-e^{-x} + C) = -e^{2x} + Ce^{3x}$$

Maka solusi umum dari persamaan diferensial tak homogen tersebut adalah:

$$y(x) = -e^{2x} + Ce^{3x}$$

Interpretasi

- Bagian Ce^{3x} adalah solusi dari persamaan homogen.
- Bagian $-e^{2x}$ adalah solusi khusus yang memenuhi bentuk tak homogen.

8.3 Studi Kasus PDB**8.3.1 Aliran Air Tanah**

Dalam operasi tambang terbuka maupun tambang bawah tanah, **pengelolaan air tanah** sangat penting untuk menjaga kestabilan lereng dan mencegah genangan air. Salah satu metode umum yang digunakan adalah **pemompaan air tanah (dewatering)**.

Model Matematis

Proses penurunan muka air akibat pemompaan dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial:

$$\frac{dh}{dt} = -kh$$

di mana:

- $h(t)$ adalah tinggi muka air tanah terhadap waktu,
- k adalah konstanta positif yang menunjukkan laju pemompaan (dipengaruhi oleh kapasitas pompa dan permeabilitas tanah),
- t adalah waktu (dalam satuan tertentu, misalnya hari atau jam).

Penyelesaian Persamaan

Persamaan tersebut adalah PDB linear homogen orde satu. Solusi umumnya adalah:

$$h(t) = h_0 e^{-kt}$$

di mana:

- h_0 adalah tinggi muka air awal saat $t = 0$.

Interpretasi Fisik

- **Jika k besar**, artinya laju penurunan air cepat, mencerminkan sistem pemompaan yang efisien.
- **Jika k kecil**, penurunan muka air lambat, bisa jadi karena debit pompa kecil atau tanah sulit ditembus airnya (impermeable).

Contoh Aplikasi

Misalkan:

- Tinggi muka air awal $h_0 = 10$ meter,
- Konstanta $k = 0,05 \text{ jam}^{-1}$.

Maka setelah $t = 24$ jam:

$$h(24) = 10 \cdot e^{-0,05 \cdot 24} \approx 10 \cdot e^{-1,2} \approx 10 \cdot 0,301 = 3,01 \text{ meter}$$

Dalam waktu 1 hari, muka air turun dari 10 meter menjadi sekitar 3 meter — pemompaan cukup efektif. Model eksponensial ini sangat berguna dalam konteks teknik tambang karena dapat digunakan untuk memperkirakan waktu yang dibutuhkan guna menurunkan muka air ke tingkat yang aman, merancang sistem pemompaan yang optimal, serta menghindari potensi bahaya seperti longsor atau genangan air di area kerja tambang. Selain itu, model ini memiliki keunggulan karena mudah dihitung, memberikan estimasi yang cepat, dan cukup akurat untuk kondisi ideal, menjadikannya alat prediktif yang efektif dalam perencanaan dan pengambilan keputusan teknis (Kreyszig, 2011; Zill, 2018).

8.3.2 Ventilasi Tambang

Dalam operasi tambang terbuka, batuan yang terpapar udara terbuka dan air hujan secara terus-menerus akan mengalami **pelapukan**. Proses ini melibatkan reaksi kimia dan fisik antara batuan dengan air, udara, dan mikroorganisme, yang pada akhirnya menyebabkan **penurunan kekuatan dan massa batuan** (Kreyszig, 2011). Jika tidak dikendalikan, pelapukan dapat menurunkan **stabilitas lereng tambang** dan meningkatkan risiko **longsor**.

Model Matematis

Proses pelapukan ini dapat dimodelkan secara sederhana menggunakan persamaan diferensial:

$$\frac{dM}{dt} = -kM$$

di mana:

- $M(t)$ adalah **massa batuan yang tersisa** pada waktu t ,
- k adalah **konstanta pelapukan** (tergantung jenis batuan dan kondisi lingkungan),
- t adalah waktu (dalam satuan tertentu, misalnya bulan atau tahun) (Zill, 2018).

Penyelesaian Persamaan

Persamaan di atas merupakan **persamaan diferensial linear homogen orde satu**, dan solusinya adalah:

$$M(t) = M_0 e^{-kt}$$

di mana:

- M_0 adalah massa awal batuan saat $t = 0$.

Solusi ini menunjukkan bahwa perubahan massa mengikuti model **eksponensial berkurang** (Zill, 2018).

Interpretasi Fisik

- Nilai k besar $\rightarrow$ pelapukan cepat $\rightarrow$ batuan cepat kehilangan massa dan kekuatan.
- Nilai k kecil $\rightarrow$ pelapukan lambat $\rightarrow$ batuan lebih tahan terhadap pelapukan.

Model ini menyatakan bahwa pelapukan berlangsung secara **eksponensial**, artinya pada awalnya massa batuan turun cepat, lalu melambat seiring waktu (Kreyszig, 2011).

Contoh Aplikasi

Misalkan:

- Massa awal batuan $M_0 = 100$ ton,
- Nilai $k = 0,02$ tahun⁻¹.

Maka setelah 10 tahun:

$$M(10) = 100 \cdot e^{-0,02 \cdot 10} = 100 \cdot e^{-0,2} \approx 100 \cdot 0,8187 = 81,87 \text{ ton}$$

Artinya: dalam 10 tahun, sekitar 18% massa batuan hilang akibat pelapukan. Ini menjadi dasar penting untuk perencanaan jangka panjang tambang (Zill, 2018).

8.3.3 Distribusi Suhu di Tanah

Dalam dunia pertambangan, **suhu bawah tanah** sangat berperan penting, khususnya untuk kenyamanan kerja di tambang bawah tanah dan untuk desain sistem ventilasi serta kestabilan termal batuan. Jika tidak ada sumber panas internal dan suhu hanya berubah akibat konduksi, maka distribusi suhu di bawah permukaan tanah dapat dimodelkan dengan **persamaan diferensial linear orde dua**.

Model Matematis

Dalam kondisi **steady-state** (keadaan tunak, tanpa perubahan waktu), model satu dimensi konduksi panas dalam tanah secara sederhana dapat ditulis:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

di mana:

- $T(x)$ adalah suhu pada kedalaman x ,
- x adalah jarak dari permukaan tanah,
- $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ menyatakan bahwa **tidak ada fluks panas berubah** terhadap kedalaman — suhu berubah secara linier (Kreyszig, 2011).

Penyelesaian Persamaan

Persamaan diferensial orde dua ini memiliki solusi umum:

$$T(x) = Ax + B$$

Dengan kondisi batas (boundary conditions) seperti:

- Suhu di permukaan: $T(0) = T_0$,
- Suhu di kedalaman L : $T(L) = T_L$,

Kita dapat menentukan A dan B :

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L}x + T_0$$

Interpretasi Fisik

- Model ini menunjukkan bahwa suhu **berubah secara linier** terhadap kedalaman tanah dalam kondisi tunak.
- **Gradien suhu** diberikan oleh $\frac{T_L - T_0}{L}$.
- Semakin besar perbedaan suhu $T_L - T_0$, semakin tajam perubahan suhu dengan kedalaman.
- Model ini relevan untuk **estimasi suhu batuan** dan **rancang ventilasi tambang** saat tidak ada panas dari sumber dalam (misalnya, aktivitas magma atau gesekan mesin berat) (Zill, 2018).

Contoh Aplikasi

Misalnya:

- Suhu permukaan $T_0 = 25^\circ\text{C}$,
- Suhu pada kedalaman $L = 100$ m adalah $T_L = 45^\circ\text{C}$,

Maka:

$$T(x) = \frac{45 - 25}{100}x + 25 = 0,2x + 25$$

- Pada kedalaman 50 meter:

$$T(50) = 0,2 \cdot 50 + 25 = 35^\circ\text{C}$$

Artinya: suhu meningkat secara linear dari 25°C di permukaan ke 45°C pada kedalaman 100 meter.

Model ini sangat berguna karena:

- Memberikan estimasi cepat suhu bawah tanah,
- Digunakan dalam desain sistem pendingin atau ventilasi tambang,
- Membantu merencanakan **kondisi kerja aman** di tambang bawah tanah.

8.3.4 Penurunan Muka Air

Dalam praktik pertambangan, **pemompaan air tanah (dewatering)** sering dilakukan untuk mencegah genangan air. Namun, dalam kondisi musim hujan atau area tambang yang berada dekat dengan sungai atau danau, terdapat **infiltrasi air dari permukaan** yang masuk ke dalam sistem air tanah. Hal ini menjadikan model penurunan muka air lebih kompleks dan tidak bisa disederhanakan menjadi bentuk homogen.

Model Matematis

Model diferensial tak homogen yang menggambarkan kombinasi **pemompaan** dan **infiltrasi air** dari permukaan:

$$\frac{dh}{dt} + kh = R$$

di mana:

- $h(t)$ = tinggi muka air tanah (m),
- k = konstanta pemompaan (positif),
- R = laju infiltrasi air dari permukaan (m/jam), dianggap konstan untuk jangka waktu tertentu.

Model ini merupakan **persamaan diferensial linear orde satu tak homogen** (Zill, 2018).

Penyelesaian Persamaan

Langkah-langkah:

1. Hitung faktor integrasi:

$$\mu(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}$$

2. Kalikan seluruh persamaan dengan $\mu(t)$:

$$e^{kt} \frac{dh}{dt} + k e^{kt} h = R e^{kt}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{kt} h] = R e^{kt}$$

3. Integrasikan kedua sisi:

$$e^{kt} h = \int R e^{kt} dt + C = \frac{R}{k} e^{kt} + C$$

4. Bagi dengan e^{kt} :

$$h(t) = \frac{R}{k} + C e^{-kt}$$

Jika kondisi awal $h(0) = h_0$ diketahui, maka:

$$C = h_0 - \frac{R}{k}$$

Sehingga solusi akhirnya:

$$h(t) = \frac{R}{k} + \left(h_0 - \frac{R}{k} \right) e^{-kt}$$

Interpretasi Fisik

- Jika tidak ada infiltrasi ($R = 0$), maka model kembali ke bentuk homogen.
- Jika $R > 0$, maka **penurunan muka air melambat** seiring waktu karena adanya asupan air dari permukaan.
- Solusi memperlihatkan bahwa **muka air akan mendekati nilai kesetimbangan** $\frac{R}{k}$ setelah waktu cukup lama.

Contoh Spesifik

Misalkan:

- Muka air awal $h_0 = 12$ meter,
- Laju infiltrasi $R = 2$ m/jam,
- Laju pemompaan $k = 0,25$ jam $^{-1}$.

Maka solusi:

$$h(t) = \frac{2}{0,25} + (12 - 8)e^{-0,25t} = 8 + 4e^{-0,25t}$$

Setelah 5 jam:

$$h(5) = 8 + 4e^{-1,25} \approx 8 + 4(0,2865) \approx 9,15 \text{ meter}$$

Artinya: setelah 5 jam, muka air turun dari 12 meter ke sekitar 9,15 meter. Namun, tidak akan turun terus-menerus karena ada suplai air dari permukaan.

Model ini sangat relevan dalam:

- **Perencanaan pompa tambang** di musim hujan,
- Menentukan **debit pompa minimum** agar genangan tidak terjadi,
- Menyusun **skenario manajemen air** yang realistis untuk tambang terbuka dan bawah tanah.

8.3.5 Penyebaran Panas Batang Logam

Dalam teknik tambang, pengendalian suhu pada peralatan dan struktur logam sangat penting untuk menjaga kestabilan dan keselamatan kerja. Model penyebaran panas dalam batang logam dapat dimodelkan menggunakan persamaan diferensial orde dua homogen.

Model Matematis

Misalkan $T(x)$ adalah suhu pada posisi x sepanjang batang logam dengan panjang L . Distribusi suhu sepanjang batang dapat dimodelkan oleh persamaan diferensial:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \alpha^2 T = 0$$

dengan α adalah konstanta yang bergantung pada sifat termal bahan. Diberikan $\alpha = 2$, panjang batang $L = 1$ meter, dan kondisi batas suhu:

- $T(0) = T_0 = 100^\circ C$ (suhu ujung kiri),
- $T(L) = T_L = 50^\circ C$ (suhu ujung kanan).

Tentukan fungsi suhu $T(x)$ sepanjang batang.

Penyelesaian

1. Persamaan karakteristik:

$$r^2 - \alpha^2 = 0 \implies r = \pm\alpha = \pm 2$$

2. Solusi umum persamaan diferensial:

$$T(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

3. Gunakan kondisi batas:

- Pada $x = 0$:

$$T(0) = C_1 + C_2 = 100$$

- Pada $x = 1$:

$$T(1) = C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = 50$$

4. Sistem persamaan linear:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 100 \\ C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = 50 \end{cases}$$

5. Selanjutnya, dapat diselesaikan untuk C_1 dan C_2 .

Setelah menghitung,

$$C_1 = \frac{50 - 100e^{-2}}{e^2 - e^{-2}}, \quad C_2 = 100 - C_1$$

Sehingga,

$$T(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Interpretasi

- Distribusi suhu mengikuti kombinasi eksponensial,
- Kondisi batas menentukan profil suhu sepanjang batang,
- Model ini membantu menentukan kebutuhan pendinginan atau pemanasan pada titik tertentu.

8.4 Latihan Soal

1. Sebuah tambang memiliki konsentrasi gas berbahaya 90 ppm yang turun menuju 20 ppm. Modelkan dengan $k = 0.25$ dan tentukan $C(t)$.
2. Massa batuan menurun 3% per tahun. Jika awalnya 500 ton, berapa sisa massa setelah 10 tahun?
3. Suhu permukaan tanah 25°C dan di kedalaman 200 m adalah 75°C . Tentukan rumus suhu terhadap kedalaman x .

8.5 Referensi

Chapter 9

Pers. Diferensial Parsial

9.1 Pengantar

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah jenis persamaan matematika yang melibatkan **turunan parsial** dari fungsi dengan dua variabel bebas atau lebih. PDP banyak digunakan untuk memodelkan fenomena alam seperti **perambatan panas**, **pergerakan fluida**, **perpindahan massa**, dan **gelombang seismik** dalam konteks pertambangan dan rekayasa lingkungan.

PDP digunakan untuk menggambarkan perubahan yang terjadi dalam sistem kontinu terhadap lebih dari satu variabel bebas, misalnya waktu dan ruang (OpenCourseWare, 2023; [strauss2007partial?](#)).

9.2 Bentuk Umum

Contoh bentuk umum PDP linear orde dua:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y)$$

di mana $u = u(x, y)$ adalah fungsi yang tidak diketahui.

9.3 Klasifikasi PDP Linear Orde Dua

Klasifikasi PDP berdasarkan diskriminan $B^2 - 4AC$:

Tipe	Persyaratan	Contoh
Eliptik	$B^2 - 4AC < 0$	Persamaan Laplace
Parabolik	$B^2 - 4AC = 0$	Persamaan Panas
Hiperbolik	$B^2 - 4AC > 0$	Persamaan Gelombang

9.4 Contoh Persamaan Diferensial Parsial

- **Persamaan Laplace (eliptik):**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- **Persamaan Panas (parabolik):**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- **Persamaan Gelombang (hiperbolik):**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

9.5 Aplikasi PDP di Teknik Pertambangan

PDP digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena dalam dunia tambang:

- **Distribusi suhu** dalam batuan tambang,
- **Aliran air tanah** di bawah permukaan tambang,
- **Penyebaran gas** seperti metana (CH_4) di lorong tambang,
- **Perambatan gelombang seismik** akibat kegiatan peledakan.

Misalnya, PDP digunakan untuk memprediksi distribusi suhu dalam ventilasi tambang bawah tanah berdasarkan waktu dan posisi (Wurster & Wallace, 2021).

9.6 Studi Kasus: Distribusi Suhu di Bawah Permukaan Tambang

Suhu dalam tanah pada kondisi steady-state dapat dimodelkan dengan persamaan Laplace satu dimensi:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Solusinya:

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0$$

- $T(x)$: suhu pada kedalaman x ,
- T_0 : suhu di permukaan,
- T_L : suhu pada kedalaman L .

Model ini digunakan dalam perencanaan **sistem ventilasi tambang** untuk menjaga temperatur kerja yang aman dan efisien.

9.7 Metode Penyelesaian PDP

9.7.1 Pemisahan Variabel

Misalnya: $u(x, t) = X(x)T(t)$

Digunakan pada persamaan gelombang dan panas untuk kondisi batas sederhana.

9.7.2 Transformasi Fourier atau Laplace

Digunakan untuk domain tak hingga atau sistem linier.

9.7.3 Metode Numerik

Jika penyelesaian analitik sulit:

- **Finite Difference Method (FDM)**
- **Finite Element Method (FEM)**
- **Finite Volume Method (FVM)**

Metode numerik banyak digunakan dalam software rekayasa seperti COMSOL, ANSYS, dan MODFLOW untuk simulasi geoteknik.

Chapter 10

Pemodelan Stokastik

Pemodelan stokastik adalah pendekatan matematis untuk memodelkan sistem atau proses yang memiliki unsur ketidakpastian. Dalam konteks teknik, sains, ekonomi, dan bidang lainnya, banyak fenomena tidak bisa diprediksi secara deterministik karena adanya variabel acak atau fluktuasi yang tidak dapat dikontrol. Pemodelan stokastik memungkinkan kita untuk menggambarkan ketidakpastian tersebut secara kuantitatif.

10.1 Ciri-Ciri Model Stokastik

- Melibatkan **variabel acak**.
- Menghasilkan **output yang berbeda-beda** untuk input yang sama.
- Dapat dianalisis menggunakan **teori probabilitas** dan **statistika**.

10.2 Komponen Utama

1. **Ruang Sampel (Ω)**: Semua kemungkinan hasil.
2. **Variabel Acak**: Fungsi dari ruang sampel ke bilangan real.
3. **Distribusi Probabilitas**: Menjelaskan kemungkinan relatif dari setiap hasil.

10.3 Contoh Aplikasi

10.3.1 Proses Poisson

Digunakan untuk memodelkan jumlah kejadian dalam interval waktu tertentu.

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

- $N(t)$: jumlah kejadian sampai waktu t ,
- λ : rata-rata kejadian per satuan waktu.

Contoh: Jumlah kerusakan alat berat dalam tambang setiap hari.

10.3.2 Proses Markov

Model stokastik yang masa depannya hanya bergantung pada kondisi saat ini.

$$P(X_{n+1} = x | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x | X_n = x_n)$$

Contoh: Pergantian status alat tambang (berfungsi $\rightarrow$ rusak $\rightarrow$ diperbaiki).

10.3.3 Model Brownian Motion

Digunakan untuk memodelkan pergerakan partikel atau harga saham:

$$X(t) = X(0) + \mu t + \sigma W(t)$$

- μ : drift,
- σ : volatilitas,
- $W(t)$: proses Wiener.

10.3.4 Monte Carlo Simulation

Metode numerik menggunakan sampel acak untuk memperkirakan hasil dari model stokastik.

Langkah-langkah:

- Tentukan variabel acak dan distribusinya,
- Hasilkan sampel acak,
- Evaluasi model untuk setiap sampel,
- Hitung rata-rata hasil simulasi.

Contoh: Estimasi waktu gagal suatu sistem tambang.

10.4 Kelebihan Pemodelan Stokastik

- Mampu menangani **ketidakpastian alami**,
- Memberikan **estimasi probabilistik**,
- Dapat digunakan untuk **optimasi berbasis risiko**.

10.5 Kekurangan

- Membutuhkan **komputasi tinggi**,
- Memerlukan **data historis** atau asumsi distribusi,
- Interpretasi hasil bisa lebih kompleks.

10.6 Referensi

Chapter 11

Pemodelan Regresi

Pemodelan regresi adalah salah satu metode statistik paling fundamental yang digunakan untuk **menganalisis hubungan antara satu atau lebih variabel independen (prediktor)** dengan **variabel dependen (respon)**. Tujuan utama dari regresi adalah **memprediksi, menjelaskan, atau mengestimasi** nilai dari variabel respon berdasarkan informasi dari variabel prediktor (Bevans, 2023; University, n.d.).

11.1 Regresi Linear Sederhana

Regresi Linear Sederhana adalah metode untuk memodelkan hubungan antara **satu variabel independen (X)** dan **satu variabel dependen (Y)** menggunakan persamaan garis lurus:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

Keterangan: - Y : variabel dependen

- X : variabel independen

- β_0 : intercept (titik potong)

- β_1 : slope (kemiringan garis)

- ε : error (noise)

Persamaan ini diasumsikan memiliki hubungan linier antara X dan Y , dengan error ε yang berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan variansi konstan (homoskedastisitas) (Bevans, 2023; Wikipedia contributors, 2025).

11.1.1 Studi Kasus 1

Prediksi produksi ore (bijih) harian berdasarkan jam operasi alat berat.

- Variabel bebas (X): Jam operasi alat berat per hari (jam)
- Variabel terikat (Y): Produksi ore per hari (ton)

11.1.2 Data Kasus 1

Misal data pengukuran 10 hari operasi alat berat di tambang adalah:

i	X_i (Jam Operasi)	Y_i (Produksi Ore)
1	5	50
2	7	65
3	8	70
4	6	60
5	9	80
6	4	45
7	7	68
8	10	90
9	6	62
10	8	75

11.1.3 Rata-rata $R\bar{X}$ & $\bar{Y}$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$\bar{X} = \frac{5 + 7 + 8 + 6 + 9 + 4 + 7 + 10 + 6 + 8}{10} = \frac{70}{10} = 7.0$$

$$\bar{Y} = \frac{50 + 65 + 70 + 60 + 80 + 45 + 68 + 90 + 62 + 75}{10} = \frac{665}{10} = 66.5$$

11.1.4 Koefisien Slope b_1

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$
5	50	$5 - 7 = -2$	$50 - 66.5 = -16.5$	$(-2) \times (-16.5) = 33$	4
7	65	0	-1.5	0	0
8	70	1	3.5	3.5	1
6	60	-1	-6.5	6.5	1
9	80	2	13.5	27	4
4	45	-3	-21.5	64.5	9
7	68	0	1.5	0	0
10	90	3	23.5	70.5	9
6	62	-1	-4.5	4.5	1
8	75	1	8.5	8.5	1

Jumlah:

$$\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 33 + 0 + 3.5 + 6.5 + 27 + 64.5 + 0 + 70.5 + 4.5 + 8.5 = 218$$

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 4 + 0 + 1 + 1 + 4 + 9 + 0 + 9 + 1 + 1 = 30$$

Maka,

$$b_1 = \frac{218}{30} = 7.27$$

11.1.5 Intercept b_0 :

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X} = 66.5 - 7.27 \times 7 = 66.5 - 50.89 = 15.61$$

11.1.6 Model Regresi Linear

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= b_0 + b_1 \times X \\ &= 15.61 + 7.27 \times X\end{aligned}$$

11.1.7 Contoh Prediksi

Jika jam operasi alat berat = 8 jam, maka estimasi produksi ore:

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= 15.61 + 7.27 \times 8 \\ &= 15.61 + 58.16 \\ &= 73.77 \text{ ton}\end{aligned}$$

11.1.8 Visualisasi 2D

```
import pandas as pd
import numpy as np
import plotly.graph_objs as go
from sklearn.linear_model import LinearRegression

# Data tambang
data = {
    'Jam_Operasi': [5, 7, 8, 6, 9, 4, 7, 10, 6, 8],
    'Produksi_Ore': [50, 65, 70, 60, 80, 45, 68, 90, 62, 75]
}
df = pd.DataFrame(data)

# Model regresi linear
X = df[['Jam_Operasi']]
y = df['Produksi_Ore']
model = LinearRegression()
model.fit(X, y)
```

```

intercept = model.intercept_
slope = model.coef_[0]

df['Produksi_pred'] = model.predict(X)
df['epsilon'] = df['Produksi_Ore'] - df['Produksi_pred']

# Garis regresi
x_line = np.linspace(df['Jam_Operasi'].min()-1, df['Jam_Operasi'].max()+1, 100)
y_line = intercept + slope * x_line

line_regresi = go.Scatter(
    x=x_line,
    y=y_line,
    mode='lines',
    name='Garis Regresi',
    line=dict(color='red', width=3)
)

# Titik data aktual
scatter_actual = go.Scatter(
    x=df['Jam_Operasi'],
    y=df['Produksi_Ore'],
    mode='markers',
    name='Data Aktual',
    marker=dict(color='blue', size=8)
)

# Garis residual epsilon (vertikal)
residual_lines = []
for i, row in df.iterrows():
    residual = go.Scatter(
        x=[row['Jam_Operasi'], row['Jam_Operasi']],
        y=[row['Produksi_pred'], row['Produksi_Ore']],
        mode='lines',
        line=dict(color='gray', width=2, dash='dot'),
        showlegend=(i==0),
        name='Error '
    )
    residual_lines.append(residual)

# Label epsilon
epsilon_labels = go.Scatter(
    x=df['Jam_Operasi'] + 0.1,
    y=(df['Produksi_Ore'] + df['Produksi_pred']) / 2,
    mode='text',
    text=[f' {i+1}' for i in range(len(df))],
    showlegend=False,
    textposition='middle right',
    textfont=dict(color='black', size=12)
)

```

```

)

# Anotasi formula model dan keterangan data aktual
annotations = [
    dict(
        x=0, y=1.12, xref='paper', yref='paper',
        text=f"<b>Model Regresi:</b><br> $\hat{Y} = \{intercept:.2f\} + \{slope:.2f\} \times Jam\_Operasi$ ",
        showarrow=False,
        font=dict(size=14, color='darkred'),
        align='left'
    ),
    dict(
        x=0.95, y=1.2, xref='paper', yref='paper',
        text=f"<b>Data Aktual:</b><br>Y = Produksi Ori",
        showarrow=False,
        font=dict(size=14, color='blue'),
        align='right'
    )
]

layout = go.Layout(
    title='Regresi Linear Sederhana: Produksi Ore vs Jam Operasi',
    xaxis=dict(title='Jam Operasi (jam)'),
    yaxis=dict(title='Produksi Ore (ton)'),
    annotations=annotations,
    margin=dict(t=100)
)

fig = go.Figure(data=[scatter_actual, line_regresi] + residual_lines + [epsilon_labels], layout=layout)
fig.show();

```

Unable to display output for mime type(s): text/html

Unable to display output for mime type(s): text/html

11.1.9 Visualisasi 3D

```

import pandas as pd
import numpy as np
import plotly.graph_objs as go
from sklearn.linear_model import LinearRegression

# Data tambang: Jam operasi dan produksi ore harian
data = {
    'Jam_Operasi': [5, 7, 8, 6, 9, 4, 7, 10, 6, 8],
    'Produksi_Ore': [50, 65, 70, 60, 80, 45, 68, 90, 62, 75]
}
df = pd.DataFrame(data)

```

```

# Model regresi linear
X = df[['Jam_Operasi']]
y = df[['Produksi_Ore']]
model = LinearRegression()
model.fit(X, y)

intercept = model.intercept_
slope = model.coef_[0]

df['Produksi_pred'] = model.predict(X)
df['epsilon'] = df['Produksi_Ore'] - df['Produksi_pred']

# Permukaan regresi linear 3D (x = Jam operasi, y = Prediksi produksi, z=0)
x_surface = np.linspace(df['Jam_Operasi'].min(), df['Jam_Operasi'].max(), 20)
y_surface = intercept + slope * x_surface
z_surface = np.zeros_like(x_surface)

surface_line = go.Scatter3d(
    x=x_surface,
    y=y_surface,
    z=z_surface,
    mode='lines',
    name='Garis Regresi (Permukaan)',
    line=dict(color='red', width=5)
)

# Scatter titik data aktual di z = residual
scatter_actual = go.Scatter3d(
    x=df['Jam_Operasi'],
    y=df['Produksi_Ore'],
    z=df['epsilon'],
    mode='markers',
    marker=dict(size=6, color='blue'),
    name='Data Aktual (Jam Operasi, Produksi, )'
)

# Garis residual vertikal dari permukaan regresi ke titik aktual
residual_lines = []
for i in range(len(df)):
    residual_line = go.Scatter3d(
        x=[df['Jam_Operasi'][i], df['Jam_Operasi'][i]],
        y=[df['Produksi_pred'][i], df['Produksi_Ore'][i]],
        z=[0, df['epsilon'][i]],
        mode='lines',
        line=dict(color='gray', width=2, dash='dot'),
        showlegend=(i==0),
        name='Error ( )'
    )
    residual_lines.append(residual_line)

```

```

# Label residual epsilon
epsilon_labels = go.Scatter3d(
    x=df['Jam_Operasi'] + 0.1,
    y=(df['Produksi_Ore'] + df['Produksi_pred']) / 2,
    z=df['epsilon'] / 2,
    mode='text',
    text=[f' {i+1}' for i in range(len(df))],
    textposition='middle right',
    showlegend=False,
    textfont=dict(size=12, color='black')
)

# Formula model regresi
formula_text = f"Ŷ = {intercept:.2f} + {slope:.2f} × Jam_Operasi"

layout = go.Layout(
    title="Visualisasi Regresi Linear Sederhana: Produksi Ore vs Jam Operasi",
    width=1600,
    height=700,
    scene=dict(
        xaxis=dict(title='Jam Operasi (jam)'),
        yaxis=dict(title='Produksi Ore (ton)'),
        zaxis=dict(title='Residual '),
    ),
    annotations=[
        dict(
            showarrow=False,
            text=f"<b>Model Regresi:</b><br>{formula_text}",
            x=0,
            y=1,
            xref='paper',
            yref='paper',
            align='left',
            font=dict(size=14, color='darkred')
        )
    ]
)

fig = go.Figure(data=[scatter_actual, surface_line] + residual_lines + [epsilon_labels], layout=layout)
fig.show();

```

Unable to display output for mime type(s): text/html

11.2 Regresi Linear Berganda

Regresi Linear Berganda (RLB) adalah perluasan dari regresi linear sederhana yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara **satu variabel dependen** (Y) dengan **dua atau lebih variabel independen** ($X_1, X_2, \dots, X_p$). Model ini digunakan

untuk **memprediksi**, **mengestimasi**, atau **menjelaskan** variabel respon berdasarkan beberapa prediktor sekaligus.

Regresi Linear Berganda adalah metode statistik yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara satu variabel dependen (Y) dengan dua atau lebih variabel independen ($X_1, X_2, \dots, X_p$). Model ini memungkinkan analisis pengaruh simultan dari beberapa prediktor terhadap variabel respon (Tranmer & Murphy, 2020).

11.2.1 Bentuk Umum Model

Persamaan umum **RLB**:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

Keterangan:

- Y : variabel dependen (respon)
- $X_1, X_2, \dots, X_p$: variabel independen (prediktor)
- β_0 : intercept
- $\beta_1, \dots, \beta_p$: koefisien regresi
- ε : galat atau error acak

11.2.2 Tujuan RLB

- Mengukur pengaruh simultan beberapa variabel bebas terhadap variabel respon.
- Memprediksi nilai Y berdasarkan nilai-nilai dari $X_1, X_2, \dots, X_p$.
- Menentukan variabel mana yang paling signifikan dalam mempengaruhi Y (Weisberg, 2011).

11.2.3 Asumsi RLB

1. **Linearitas**: Hubungan antara X_i dan Y bersifat linier.
2. **Independensi**: Observasi bersifat independen satu sama lain.
3. **Homoskedastisitas**: Variansi error konstan di seluruh nilai prediktor.
4. **Normalitas Error**: Galat (ε) berdistribusi normal.
5. **Tidak ada multikolinearitas tinggi** antar variabel independen (Tranmer & Murphy, 2020).

11.3 Evaluasi Model RLB

Beberapa ukuran evaluasi yang umum digunakan:

- R^2 (**Koefisien Determinasi**): Menunjukkan proporsi variabilitas Y yang dijelaskan oleh model.
- **Adjusted R^2** : Menyesuaikan R^2 berdasarkan jumlah prediktor.
- **Uji F**: Menguji signifikansi model secara keseluruhan.
- **Uji t**: Menguji signifikansi masing-masing koefisien β_i (Chen, 2019).

11.3.1 Studi Kasus2

Regresi Linear Berganda (3 Variabel) - Kasus Tambang

Sebuah perusahaan tambang ingin mengetahui pengaruh **jumlah jam kerja alat berat (X₁)**, **jumlah operator (X₂)**, dan **jumlah solar yang dikonsumsi (X₃)** terhadap **produksi ore harian (Y)**.

11.3.2 Data Kasus 2

Data dari 10 hari terakhir tercatat sebagai berikut:

Hari	Jam Kerja Alat Berat (X_1)	Jumlah Operator (X_2)	Konsumsi Solar (liter) (X_3)	Produksi Ore (ton) (Y)
1	8	5	120	75
2	7	6	115	72
3	9	5	130	80
4	6	4	110	65
5	10	6	140	85
6	7	5	118	70
7	8	6	125	78
8	5	4	105	60
9	9	6	135	83
10	6	5	112	68

11.3.3 Pertanyaan

1. Hitunglah model regresi linear berganda:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$$

2. Tentukan nilai dari koefisien regresi b_0 , b_1 , b_2 , dan b_3 dengan cara:
 - Menggunakan metode matriks normal equation
 - Atau software seperti Python (opsional)
3. Tafsirkan masing-masing koefisien regresi secara kontekstual.
4. Prediksikan produksi ore (Y) jika:
 - $X_1 = 8$ (jam kerja)
 - $X_2 = 5$ (jumlah operator)
 - $X_3 = 125$ (liter solar)

11.3.4 Model Umum

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$$

11.3.5 Langkah-langkah

Matriks Persamaan Normal

Gunakan persamaan:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

Matriks Koefisien

Hasil dari perhitungan:

$$b_0 = 19.81$$

$$b_1 = 3.18$$

$$b_2 = 1.93$$

$$b_3 = 0.16$$

Model Regresi

$$\hat{Y} = 19.81 + 3.18X_1 + 1.93X_2 + 0.16X_3$$

11.3.5.1 Interpretasi Koefisien

- $b_1 = 3.18$: Setiap penambahan 1 jam kerja alat berat (X_1), produksi ore meningkat sekitar 3.18 ton (dengan asumsi variabel lain konstan).
- $b_2 = 1.93$: Setiap penambahan 1 operator, produksi ore meningkat 1.93 ton.
- $b_3 = 0.16$: Setiap penambahan 1 liter solar, produksi ore meningkat 0.16 ton.

Prediksi

Jika diketahui:

- $X_1 = 8$ (jam kerja)
- $X_2 = 5$ (jumlah operator)
- $X_3 = 125$ (liter solar)

Maka:

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= 19.81 + 3.18(8) + 1.93(5) + 0.16(125) \\ &= 19.81 + 25.44 + 9.65 + 20.50 \\ &= 75.46 \text{ ton}\end{aligned}$$

Referensi

- Academy, K. (2024). *First order differential equations*. <https://www.khanacademy.org/math/differential-equations/first-order-differential-equations>
- Bevans, R. (2023). *Simple linear regression / an easy introduction & examples*. Scribbr. <https://www.scribbr.com/statistics/simple-linear-regression/>

- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary differential equations and boundary value problems*. <https://www.wiley.com/en-us/Elementary+Differential+Equations+and+Boundary+Value+Problems%2C+11th+Edition-p-9781119452715>
- Chen, G. (2019). *Multiple linear regression*. San Jose State University; <https://www.sjsu.edu/faculty/guangliang.chen/Math261a/Ch3slides-multiple-linear-regression.pdf>.
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced engineering mathematics* (10th ed.). Wiley.
- OpenCourseWare, M. (2023). *18.152 introduction to partial differential equations*. <https://ocw.mit.edu/courses/18-152-introduction-to-partial-differential-equations-spring-2023/>
- Tranmer, M., & Murphy, J. (2020). *Multiple linear regression (2nd edition)*. University of Manchester. <https://hummedia.manchester.ac.uk/institutes/cmist/archive-publications/working-papers/2020/multiple-linear-regression.pdf>
- University, P. S. (n.d.). *2.1 - what is simple linear regression? | STAT 462*. <https://online.stat.psu.edu/stat462/node/91/>
- Weisberg, S. (2011). *Applied linear regression* (4th ed.). John Wiley & Sons. <https://www.stat.purdue.edu/~qfsong/teaching/525/book/Weisberg-Applied-Linear-Regression-Wiley.pdf>
- Wikipedia contributors. (2025). *Simple linear regression*. https://en.wikipedia.org/wiki/Simple_linear_regression.
- Wurster, R., & Wallace, K. (2021). Heat transfer simulation in underground mine ventilation networks using partial differential equations. *Journal of Sustainable Mining*, 20(1), 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.jsm.2020.12.001>
- Zill, D. G. (2018). *A first course in differential equations with modeling applications* (11th ed.). Cengage Learning.

